Devoir surveillé 3

Calculatrice interdite

Mardi 11 février 2025

Exercice 1 (4 points)

1. Énoncer les trois caractéristiques d'un vecteur.

2. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Calculer les coordonnées de $\vec{w} = -5\vec{u} + 2\vec{v}$.

Correction

1.
- direction
- sens
- norme

2. $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\times 2+2\times(-1)\\-5\times(-3)+2\times(-1)\end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix}-12\\13\end{pmatrix}$

Exercice 2 (3 points)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

1. $\|\vec{u}\|$ est un réel strictement positif.

2. Si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Correction

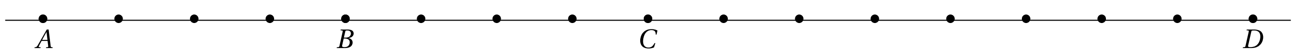
1. C'est faux, tous les vecteurs non nuls ont une norme strictement supérieure à 0 mais $\|\vec{0}\| = 0$.

2. C'est faux, des vecteurs de direction différentes peuvent avoir la même norme mais ne sont pas égaux. C'est le cas de $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

3. C'est vrai. Si des vecteurs sont égaux, leurs trois caractéristiques sont égales dont la norme.

Exercice 3 (4 points)

Déterminer x, y, z et t tels que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BC} = y\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AD} = z\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DB} = t\overrightarrow{AB}$.

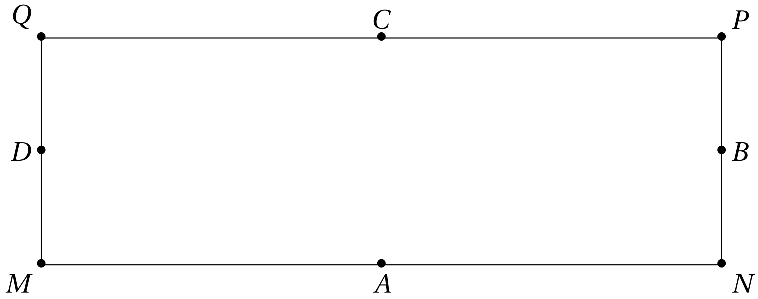


Correction

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB}$ donc $x = -1$.
- $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ donc $y = -\frac{1}{3}$.
- $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{BC}$ donc $z = 4$.
- $\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{AB}$ donc $t = -3$.

EXERCICE 4 (6 POINTS)

On considère un rectangle $MNPQ$ et on désigne par A, B, C et D les milieux respectifs de $[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$.



Compléter les égalités suivantes en utilisant la figure précédente. Pas de justification attendue.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\ldots.$

2. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\ldots.$

3. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QC}=\ldots.$

4. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\ldots.$

5. $\overrightarrow{NB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NQ}=\ldots.$

6. $2\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{PN}=\ldots.$

CORRECTION

Plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{NC}$

2. $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{PN}$

3. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{MP}$

4. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{MN}$

5. $\overrightarrow{NB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{NC}$

6. $2\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{MN}$

EXERCICE 5 (3 POINTS)

Soient R, S et T trois points.

1. Posons P tel que $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}$.

À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{RS}$.

Indication : on pourra utiliser que $\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RP}$.

2. Posons U tel que $\overrightarrow{SU}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{ST}$.

À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{ST}$.

3. En déduire la nature du quadrilatère $RUTS$.

CORRECTION

1. On sait que $\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RP}$ et que $\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}$ donc $\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{TT}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{RS}$ d'après la relation de Chasles.

2. On sait que $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SU}$ d'après la relation de Chasles et que $\overrightarrow{SU}=\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{ST}$ donc :

$\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{RR}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{ST}$ d'après la relation de Chasles.

3. D'après la question précédente, $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{ST}$ et on sait que $\overrightarrow{RU}=\overrightarrow{ST} \Leftrightarrow RUTS$ est un parallélogramme.