Devoir maison

À rendre le lundi 5 mai 2025

Questions préliminaires

1. Montrer que $\frac{1}{8}x^2 - 4x + 32 = \frac{1}{8}(x-16)^2$.

2. Construire le tableau de signe de $\frac{1}{8}(x-16)^2$.

Correction

1. Développons le second membre :

$$\frac{1}{8}(x-16)^2 = \frac{1}{8}(x^2 - 32x + 256) = \frac{1}{8}x^2 - 4x + 32$$

Ainsi,

$$\frac{1}{8}x^2 - 4x + 32 = \frac{1}{8}(x-16)^2.$$

2.

x	$-\infty$		16		$+\infty$
$x-16$		$-$	0	$+$	
$x-16$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{8}(x-16)^2$		$+$	0	$+$	

Problème

On coupe une ficelle de 32 cm de long en deux morceaux avec lesquels on forme deux carrés.
Où doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des deux carrés soit la plus petite possible ?

Indication : la somme minimale sera égale à 32 cm^2.

Correction

Si on coupe la ficelle en deux, un bout mesurera x cm et l'autre $32-x$ cm. Avec le premier morceau, nous formons un carré de coté $\dfrac{x}{4}$ et avec le second, un carré de coté $\dfrac{32-x}{4}$.
La somme des aires des deux carrés $A(x)$ est donc égale à :

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{32-x}{4}\right)^2 \\
&= \frac{x^2}{16} + \frac{(32-x)^2}{16} \\
&= \frac{x^2+(32-x)^2}{16} \\
&= \frac{x^2+32^2-64x+x^2}{16} \\
&= \frac{2x^2-64x+1\,024}{16} \\
&= \frac{1}{8}x^2-4x+64
\end{aligned}$$

Nous savons que le minimum de $A(x)$ est égal à 32. Ainsi, étudier le signe de la différence $A(x)-32$ nous permettra de chercher le x minimisant $A(x)-32$ et donc $A(x)$ par la même occasion.

$$A(x)-32 = \frac{1}{8}x^2-4x+64-32 = \frac{1}{8}x^2-4x+32 = \frac{1}{8}(x-16)^2 \text{ d'après les questions préliminaires}$$

Le tableau de signes précédemment obtenu nous indique que le minimum de $A(x)-32$ est atteint en $x=16$.
Finalement, $A(x)$ est minimal pour $x=16$, c'est-à-dire quand on coupe la ficelle en deux parties égales.