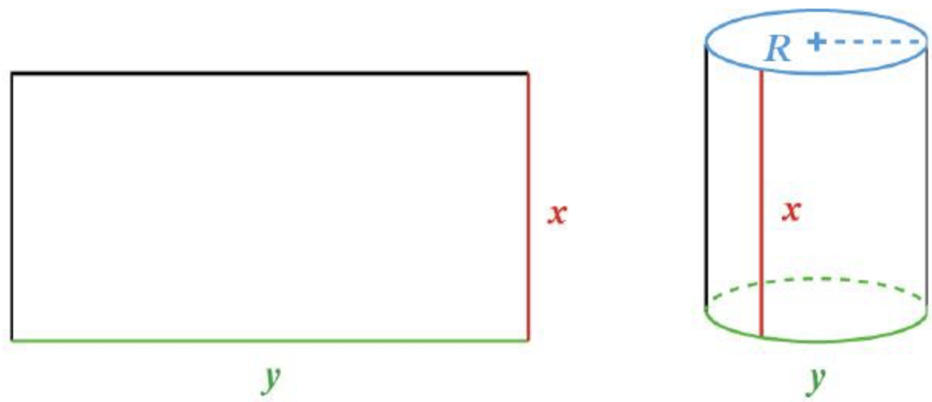
Devoir maison

À rendre le lundi 11 mars 2025

On dispose d'un feuille rectangulaire de dimensions x et y (en cm) dont le périmètre reste fixe, égal à 60 cm. À l'aide de cette feuille, on fabrique un cylindre de hauteur x et de rayon de base R.



On cherche à fabriquer le cylindre dont le volume est maximal.

1. **a.** Justifier que $x \in [0;30]$.
On admet que si $x = 0$ ou 30, le cylindre a un volume nul.

b. Exprimer le rayon R de la base en fonction de y, puis en fonction de x.

c. Montrer que le volume $V(x)$ du cylindre est égal à :

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}x(30-x)^2$$

d. En utilisant la calculatrice, trouver la valeur de x pour laquelle le volume du cylindre semble maximal. Quel semble être ce volume maximal ?

2. **a.** Montrer que pour tout réel $x \in [0;30]$, on a :

$$x(30-x)^2 - 4\,000 = (x-40)(x-10)^2.$$

b. Étudier le signe de la différence $V(x) - V(10)$ sur l'intervalle $x \in [0;30]$.

c. Pour quelle valeur de x le volume du cylindre est-il maximal ?

d. Calculer alors les dimensions de la feuille rectangulaire et le volume de ce cylindre maximal.

Correction

1. **a.** Le périmètre du rectangle est égal à $2x+2y$ (et aussi à 60) et x, y sont des nombres positifs.
Ainsi, $60 = 2x+2y \geqslant 2x$ ce qui est équivalent à $30 \geqslant x$.
Comme $30 \geqslant x \geqslant 0$, alors $x \in [0;30]$.

b. Le périmètre de la base du cylindre est égale à y et à $2\pi R$, c'est-à-dire $y = 2\pi R$.
Nous avons donc $R = \dfrac{y}{2\pi}$.
Enfin, $60 = 2x+2y \geqslant 2x \Leftrightarrow y = 30 - x$.
En remplaçant y par son expression dans celle de R, nous obtenons :

$$R = \frac{30-x}{2\pi}.$$

c. Notons $A(x)$ l'aire du disque à la base du cylindre.

$$V(x) = x \times A(x) = x \times \pi R^2 = x \times \pi \left(\frac{30-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x\pi(30-x)^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}x(30-x)^2$$

d. Après une lecture graphique sur la calculatrice, on observe que le volume semble maximal pour $x = 10$.

2. **a.** Soit x $[0\,;30]$. On développe et on réduit les deux membres de l'égalité qu'on souhaite démontrer.

- $$\begin{aligned} x(30-x)^2 - 4\,000 &= x\left[900 - 60x + x^2\right] - 4\,000 \\ &= 900x - 60x^2 + x^3 - 4\,000 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (x-40)(x-10)^2 &= (x-40)\left[x^2 - 20x + 100\right] \\ &= x^3 - 20x^2 + 100x - 40x^2 + 800x - 4\,000 \\ &= x^3 - 60x^2 + 900x - 4\,000 \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux donc l'égalité $x(30-x)^2 - 4\,000 = (x-40)(x-10)^2$ est prouvée.

b. Soit x $[0\,;30]$.

$$\begin{aligned} V(x) - V(10) &= \frac{1}{4\pi}x(30-x)^2 - \frac{1}{4\pi}10(30-10)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi}x(30-x)^2 - \frac{4\,000}{4\pi} \\ &= \frac{x(30-x)^2 - 4\,000}{4\pi} \\ &= \frac{(x-40)(x-10)^2}{4\pi} \text{ d'après la question précédente} \\ &= \frac{(x-40)(x-10)(x-10)}{4\pi} \end{aligned}$$

Faisons un tableau de signes $(x-40)(x-10)(x-10)$. Son signe est le même que celui de $V(x)$ puisque $4\pi > 0$.

x	$-\infty$		10		40		$+\infty$
$x-40$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-40)(x-10)(x-10)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On se rend compte que sur $[0\,;30]$, $V(x) - V(10) \leqslant 0$.

c. Pour $x \neq 10$, sur $[0\,;30]$, $V(x) < V(10)$.
$V(x)$ est bien maximal pour $x = 10$.

d. Si $x = 10$, alors $y = 30 - x = 30 - 10 = 20$.
Pour ces valeurs, $V(10) = \dfrac{4\,000}{4\pi} = \dfrac{1000}{\pi}$.