DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée

Mardi 7 mai 2024

EXERCICE 1 (6 POINTS)

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans **R**.

1. $(5x-4)^2 = 169$

2. $7x^3 - 21 = 9$

3. $(x+1)^2 \geqslant 4$

4. $2x^3 - 8 < x^3 + 19$

CORRECTION

1.

$$\begin{aligned}
&(5x-4)^2 = 169\\
\Leftrightarrow\ & 5x-4 = 13 \text{ ou } 5x-4 = -13\\
\Leftrightarrow\ & 5x = 17 \text{ ou } 5x = -9\\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{17}{5} \text{ ou } x = \frac{-9}{5}
\end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \{-\frac{9}{5}; \frac{17}{5}\}$

2.

$$\begin{aligned}
&7x^3 - 21 = 9\\
\Leftrightarrow\ & 7x^3 = 30\\
\Leftrightarrow\ & x^3 = \frac{30}{7}\\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{\frac{30}{7}}
\end{aligned}$$

$\mathscr{S} = \left\{\sqrt[3]{\frac{30}{7}}\right\}$

3.

$$\begin{aligned}
&(x+1)^2 \geqslant 4\\
\Leftrightarrow\ & x+1 \leqslant -2 \text{ ou } x+1 \geqslant 2\\
\Leftrightarrow\ & x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 1
\end{aligned}$$

$\mathscr{S} =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

4.

$$\begin{aligned}
&2x^3 - 8 < x^3 + 19\\
\Leftrightarrow\ & x^3 < 27\\
\Leftrightarrow\ & x < \sqrt[3]{27}\\
\Leftrightarrow\ & x < 3
\end{aligned}$$

$\mathscr{S} =]-\infty; 3[$

Exercice 2 (4 points)

Au cours d'une évolution, on considère une valeur de départ V_d et une valeur d'arrivée V_a.

1. Donner l'expression de t, le taux d'évolution associé, en fonction de V_d et V_a.
2. Donner l'expression de CM, le coefficient multiplicateur associé, en fonction de V_d et V_a.
3. $V_d = 13$ et $t = 0{,}69$. Calculer V_a.
4. $V_a = 110$ et $CM = 1{,}2$. Calculer V_d.

Correction

1. $t = \dfrac{V_a - V_d}{V_d}$
2. $CM = \dfrac{V_a}{V_d}$ (si $V_d \neq 0$)
3. $V_a = CMV_d = (1+t)V_d = 1{,}69 \times 13 = 21{,}97$
4. $V_d = \dfrac{V_a}{CM} = \dfrac{110}{1{,}2} \approx 91{,}667$

Exercice 3 (10 points)

La variation du prix d'un produit influence souvent la demande de ce produit par les consommateurs.
En économie, c'est « l'élasticité » qui mesure cette influence.
Plus précisément, lorsqu'un prix p passe d'une valeur p_1 à une valeur p_2 et que la demande d passe alors d'une quantité d_1 à une quantité d_2, l'élasticité-prix de la demande, notée e, est le quotient du taux d'évolution de la demande par le taux d'évolution du prix.

$$e = \dfrac{\dfrac{d_2 - d_1}{d_1}}{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1}}$$

1. Un producteur de fraises françaises constate que, lorsque le prix d'une barquette de 500 g passe de 5€ à 6€, ses ventes, initialement de 30 tonnes, diminuent de 25%.
   - **a.** Calculer le taux d'évolution du prix lorsqu'il passe de 5€ à 6€.
   - **b.** En déduire l'élasticité-du prix de la demande des fraises.
   - **c.** Calculer le chiffre d'affaires du producteur lorsque le prix de la barquette est de 5€, puis de 6€.
     L'augmentation du prix de la barquette de fraises est-elle judicieuse ?
2. Le tableau ci-dessous recense le prix moyen d'un litre d'essence SP98 et la dépense annuelle des ménages correspondante.

	2011	2012
Prix moyen d'un litre de SP98 (en euros)	1,55	1,63
Dépense des ménages en SP98 (en millions d'euros)	14 808	14 566

   - **a.** Calculer l'élasticité-prix de la dépense en essence SP98 entre 2011 et 2012.
   - **b.** Interpréter le résultat obtenu.
3. Conjecturer le signe de l'élasticité-prix :
   - **a.** d'un bien de première nécessité, indispensable et sans produit de substitution, comme le pain.
   - **b.** d'un bien de moindre nécessité, comme les vêtements ou les sorties au cinéma.

CORRECTION

1. **a.** Lorsque le prix passe de $p_1 = 5$ à $p_2 = 6$, alors :

$$t = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{6-5}{5} = 0{,}2.$$

b. On indique dans l'énoncé que lors de cette hausse des prix, la demande diminue de 25%. Ainsi, le taux d'évolution de la demande $\dfrac{d_2 - d_1}{d_1}$ est égal à $-0{,}25$.

$$e = \frac{\dfrac{d_2 - d_1}{d_1}}{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{-0{,}25}{0{,}2} = -1{,}25$$

c. Notons C_1 le chiffre d'affaires quand la barquette de fraises était à 5€ et C_2 le chiffre d'affaires pour une barquette de fraises maintenant à 6€. Le chiffre correspond au produit du nombre de barquettes et du prix individuel d'une barquette.

- À 5€, il y a 30 tonnes de fraises vendues, soit 30 000 kg et donc 60 000 barquettes de 500 g.

$$C_1 = 60\,000 \times 5 = 300\,000$$

  Le premier chiffre d'affaires s'élève à 300 000€.
- $30 \times (1 - 0{,}25) = 22{,}5$
  À 6€, il y a 22,5 tonnes de fraises vendues, soit 22 500 kg et donc 45 000 barquettes de 500 g.

$$C_1 = 45\,000 \times 6 = 270\,000$$

  Le second chiffre d'affaires s'élève à 270 000€.

L'augmentation du prix de la barquette de fraises n'est pas judicieuse puisqu'en montant les prix, le chiffre d'affaires a diminué.

2. **a.** La variation relative du prix est simple à calculer :

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{1{,}63 - 1{,}55}{1{,}55}.$$

Seulement, la dépense des ménages ne permet pas directement d'évaluer la demande. Il faut dénombrer le nombre de litres écoulés chaque année.

$$d_1 = \frac{14\,808}{1{,}55} \text{ et } d_2 = \frac{14\,566}{1{,}63}$$

Finalement, une application numérique donne :

$$e = \frac{\dfrac{d_2 - d_1}{d_1}}{\dfrac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{\dfrac{\dfrac{14\,566}{1{,}63} - \dfrac{14\,808}{1{,}55}}{\dfrac{14\,808}{1{,}55}}}{\dfrac{1{,}63 - 1{,}55}{1{,}55}} \approx -1{,}791.$$

b. L'élasticité est encore plus importante en valeur absolue que pour le problème précédent. Le rapport entre évolution de la demande et évolution du prix est encore plus important.

3. Le signe de e dépend du signe du taux d'évolution du prix et de celui de la demande. Si les deux taux sont de même signe alors e est positive, sinon elle est négative.

a. On peut supposer que si le prix d'un produit de première nécessité augmente, la demande ne change pas ou diminue très peu. Ainsi, l'élasticité est nulle ou très légèrement négative.

b. On peut supposer que si le prix d'un produit de moindre nécessité augmente, la demande diminue bien plus. Ainsi, l'élasticité est strictement négative.

Remarque : les produits de luxe ont une élasticité positive. En effet, plus un produit est cher plus il est désirable et se vend.