DEVOIR SURVEILLÉ 4

Calculatrice autorisée

Jeudi 1er février 2024

EXERCICE 1 (4 POINTS)

1. Énoncer la relation de Chasles.

2. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Calculer les coordonnées de $\vec{w} = -5\vec{u} + 2\vec{v}$.

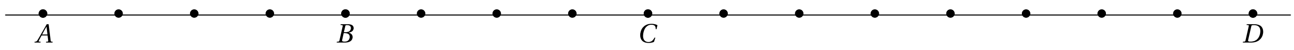
CORRECTION

1. Voir cours.

2. $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\times 2 + 2\times(-1)\\-5\times(-3) + 2\times(-1)\end{pmatrix} = \vec{w}\begin{pmatrix}-12\\13\end{pmatrix}$

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Déterminer x, y, z et t tels que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BC} = y\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{BC} = z\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DB} = t\overrightarrow{AB}$.



CORRECTION

- $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB}$ donc $x = -1$.
- $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $y = -\frac{1}{3}$.
- $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ donc $z = \frac{1}{4}$.
- $\overrightarrow{DB} = -3\overrightarrow{AB}$ donc $t = -3$.

EXERCICE 3 (8 POINTS)

Soient $A(3;2)$, $B(9;4)$, $C(1;8)$ et $D(x;y)$, où x et y sont deux réels.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. Donner les valeurs de x et y telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

3. Calculer les longueurs AB, BC et AC.

4. Déduire, de la question précédente, la nature du triangle ABC.

CORRECTION

1. On a :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9-3\\4-2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x-1\\y-8\end{pmatrix}}$.

2. On résout les deux équations $x - 1 = 6$ et $y - 8 = 2$ qui admettent pour solutions $\boxed{x = 7 \text{ et } y = 10}$.

3.
- $AB = \sqrt{(9-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
- $BC = \sqrt{(1-9)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = \sqrt{4}\times\sqrt{4}\times\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

- $AC = \sqrt{(1-3)^2+(8-2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

4. On a vu en question précédente que $AB = AC$ donc $\boxed{ABC \text{ est isocèle en } A}$ mais il n'est $\boxed{\text{pas équilatéral}}$ car $BC \neq \sqrt{40}$.

Si ABC est rectangle, il l'est en A aussi car BC est le plus grand coté.
Vérifions la réciproque du théorème de Pythagore :
$BC^2 = \sqrt{80}^2 = 80$ et $AB^2 + BC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{40}^2 = 40 + 40 = 80$.
Ainsi, comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $\boxed{ABC \text{ est rectangle en } A}$.

Pour conclure, $\boxed{ABC \text{ est un triangle isocèle rectangle en } A}$.

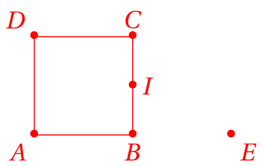
EXERCICE 4 (4 POINTS)
Soit $ABCD$ un carré. Le point E est symétrique de A par rapport à B et I est le milieu de $[BC]$.

1. On considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

a. Déterminer les coordonnées de A, B, C, D et E.
b. Montrer que I est le milieu de $[DE]$.

2. Déterminer que I est milieu de $[DE]$ sans utiliser les coordonnées.
Indication : On pourra montrer que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DI}$ *ou alors que* $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IE}$.

CORRECTION
Faisons d'abord une figure.



1. **a.** $A(0;0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ et $E(2,0)$.
b. I a pour coordonnées les moyennes de celles de B et C, c'est-à-dire, $I\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$.

Vérifions que le milieu de $[DE]$ a pour coordonnées $(1; \frac{1}{2})$:
Par moyenne de D et E, on a : $\left(\frac{0+2}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = (1; \frac{1}{2})$.

2. I est milieu de $[DE] \Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DI}$.
Montrons que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DI}$. Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IE} \\ &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE}\end{aligned}$$

Or, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$ car E est le symétrique de A par B et $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{CI}$ car I est le milieu de $[BC]$. De plus, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DI} \quad \text{par Chasles} \\ &= 2\overrightarrow{DI}\end{aligned}$$