Devoir surveillé 3

Calculatrice autorisée

Mercredi 10 janvier 2024

Exercice 1 (6 points)

1. Soit $n = 2^3 \times 5^3$. Décrire l'ensemble de ses diviseurs positifs.

2. Soient a et b deux entiers relatifs. On suppose que a est pair et b impair.

   Préciser la parité des entiers relatifs suivants.

   a. $2a+3b$ **b.** a^2-b^2 **c.** $9a+4b$

Correction

1. Soit $n = 2^3 \times 5^3$. Ses diviseurs positifs sont sous la forme $2^k \times 5^l$ avec $0 \leqslant k \leqslant 3$ et $0 \leqslant l \leqslant 3$. Il y a donc :
   - $2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3$
   - $2^0 \times 5 ; 2^1 \times 5 ; 2^2 \times 5 ; 2^3 \times 5$
   - $2^0 \times 5^2 ; 2^1 \times 5^2 ; 2^2 \times 5^2 ; 2^3 \times 5^2$
   - $2^0 \times 5^3 ; 2^1 \times 5^3 ; 2^2 \times 5^3 ; 2^3 \times 5^3$.

2. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $k' \in \mathbf{Z}$ tel que $a = 2k$ et $b = 2k'+1$.

   a. $2a+3b = 2\times 2k + 3\times(2k'+1) = 4k+6k'+3 = 2(2k+3k'+1)+1$ impair

   b. $a^2-b^2 = (2k)^2 - (2k'+1)^2 = 4k^2 - (4k'^2+4k'+1) = 4k^2-4k'^2-4k'-2+1 = 2(2k^2-2k'^2-2k'-1)+1$ impair

   c. $9a+4b = 9\times 2k + 4(2k'+1) = 18k+8k'+4 = 2(9k+4k'+2)$ pair

Exercice 2 (4 points)

Un site A de vente de livres en ligne souhaite réaliser une étude statistique sur l'âge de sa clientèle. Les résultats sont donnés ci-dessous.

x_i	$[18;20[$	$[20;25[$	$[25;30[$	$[30;35[$	$[35;40[$
n_i	190	349	362	378	405
x_i	$[40;45[$	$[45;50[$	$[50;55[$	$[55;60[$	60 et plus
n_i	216	200	250	200	232

1. Estimer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart-type σ des âges des clients de cette entreprise.

   On pourra utiliser le centre $\frac{a+b}{2}$ des intervalles $[a;b[$ et 65 pour la classe "60 ans et plus".

2. Comparer la clientèle de ce site à celle d'un site B dont les âges ont pour moyenne 37,0 ans et pour écart-type 14,4 ans.

Correction

1. Avec l'estimation conseillée, on obtient $\overline{x} \approx 38{,}560$ et $\sigma \approx 13{,}713$.

2. Le site B a une clientèle **globalement plus jeune** que le site A. Sa moyenne est plus faible d'une année et demi environ pour une **dispersion un peu plus importante** de 0,7 année.

Exercice 3 (6 points)

Soit $t \in [3;8]$. On considère la série statistique suivante.

x_i	0	2	3	t	8
n_i	12	10	3	15	10
ECC	12	22	25	40	50
f_i	0,24	0,2	0,06	0,3	0,2
FCC	0,24	0,44	0,5	0,8	1

1. Sur le sujet, compléter les trois dernières lignes (effectifs cumulés croissants, fréquences et fréquences cumulées croissantes).

2. Donner l'expression de la médiane M en fonction de t.

3. Quel est le premier quartile Q_1 ?

4. Donner l'expression de la moyenne $\overline{x}$ en fonction de t.

CORRECTION

1. Voir tableau.

2. Il y a 50 termes donc la médiane est la moyenne du 25e terme et du 26e : $M = \dfrac{3+t}{2}$.

3. $\dfrac{50}{4} = 12{,}5$ donc Q_1 est le 13e terme, c'est-à-dire, $Q_1 = 2$.

4.

$$\overline{x} = \frac{0\times 12 + 2\times 10 + 3\times 3 + t\times 15 + 8\times 10}{50} = \frac{109+15t}{50}$$

EXERCICE 4 (4 POINTS)

Dans cet exercice, on souhaite démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
On suppose **par l'absurde** qu'il existe un nombre fini N de nombres premiers distincts, que l'on note alors dans l'ordre croissant $p_1, p_2, \dots, p_N$.

1. Soit $K = \left(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_N\right) + 1$.

Justifier que, pour tout entier i compris entre 1 et N, p_i n'est pas un diviseur de K.

2. Montrer que le nombre K est premier. Conclure.

CORRECTION

1. Si p_i est un diviseur de K alors p_i est un diviseur de $K - \left(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_N\right)$ par différence donc de 1. C'est impossible car sinon $p_i = 1$.

2. Si K admet un diviseur premier, c'est l'un des p_i. C'est exclu par la question précédente. Ainsi, K est divisible par 1 et K seulement donc K est premier.

C'est absurde de supposer qu'il y a un nombre fini N de nombres premiers puisque K est strictement supérieur à tous les p_i et on a un $N+1$e nombre premier.

L'ensemble des nombres premiers est infini.