NOM : .... **Prénom :** .... **Classe :** ....

Devoir commun de mathématiques

MARS 2024

DURÉE : 2 HEURES

Le sujet comprend 8 pages numérotées de 1 à 8. Les exercices pourront être traités dans n'importe quel ordre.

L'utilisation d'une calculatrice graphique est autorisée.
Tout échange de matériel entre candidats est interdit.

Les réponses sont à remplir directement sur le sujet.
Si la place allouée sur la copie est insuffisante, on n'hésitera pas à utiliser les dernières pages pour écrire la fin de ses réponses.
On n'oubliera pas dans ce cas de mentionner clairement où est la fin de la réponse.

Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements auront une rôle majeur dans l'appréciation de la copie.
Ainsi, toute réponse non justifiée (sauf mention contraire dans l'énoncé) ne pourra donner tous les points possibles.

Toute sortie est interdite avant 1h50 de composition.

BARÈME PROVISOIRE QUI SERA ADAPTÉ LORS DE LA CORRECTION.

Exercice	1	2	3	4	5	Total
Points	10	15	8	13	4	50

Exercice 1 (∼ *10 points*)

Un directeur d'un supermarché décide d'étudier le temps d'attente aux caisses. Pour cela, il note le lundi et le vendredi les temps d'attente en minutes entières de cent clients.

Parie A : Étude de l'échantillon du lundi.
Le lundi, il obtient la répartition suivante :

Temps d'attente en caisse (en min)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de clients	14	13	23	9	14	8	12	4	1	2
Effectifs cumulés croissants	14	27	502	59	73	81	93	97	98	100

1. 1 point Compléter la dernière ligne du tableau précédent.
2. 1,5 point Calculer le temps moyen d'attente aux caisses du supermarché pour cet échantillon (arrondir au dixième si nécessaire).
   On a $\bar{x} = \dfrac{1 \times 14 + 2 \times 13 + 3 \times 23 + \ldots + 9 \times 1 + 10 \times 2}{14 + 13 + 23 + 9 + 14 + 8 + 12 + 4 + 1 + 2} = \dfrac{408}{100} = 4,08 \approx 4,1.$
   Le temps d'attente moyen est donc d'environ $4,1$ minutes.
3. 2,5 points Calculer la médiane et les quartiles de la série statistique des temps d'attente.

   L'effectif total est pair donc la médiane est la valeur moyenne entre la 50^{eme} et la 51^{eme}.
   On a donc $Me = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$

   ▷ Le premier quartile correspond à la $\dfrac{100}{4} = 25^{eme}$ valeur. On a donc $Q_1 = 2$.
   ▷ Le premier quartile correspond à la $3 \times \dfrac{100}{4} = 75^{eme}$ valeur. On a donc $Q_3 = 6$.

4. Le directeur adjoint souhaite ouvrir des caisses supplémentaires si le temps d'attente dépasse certaines valeurs critiques.
   (a) 1 point Si plus de 15% des clients attendent 7 minutes ou plus en caisse une nouvelle sera créée.
   Faut-il ouvrir cette nouvelle caisse le lundi ?
   Pour répondre à cette question, nous allons calculer la fréquence cumulée décroissante associée à la valeur 7. On a $\dfrac{2+1+4+12}{100} = \dfrac{19}{100}$. Il y a donc 19% des clients qui attendent 7 minutes ou plus. Il faut donc ouvrir une nouvelle caisse le lundi.
   (b) 1 point Si le temps moyen d'attente aux caisses dépasse 5 minutes, un nouvelle sera créée.
   Faut-il ouvrir cette nouvelle caisse le lundi ?
   D'après la question 2), le temps moyen d'attente aux caisses le lundi est d'environ 4 minutes et 6 secondes.
   Il n'est donc pas nécessaire d'ouvrir une nouvelle caisse le lundi pour cette raison.

Partie B : Étude de l'échantillon du vendredi. Pour le vendredi, les temps d'attente (en minutes) aux caisses d'un échantillon de cent clients sont résumés par les indicateurs ci-dessous :

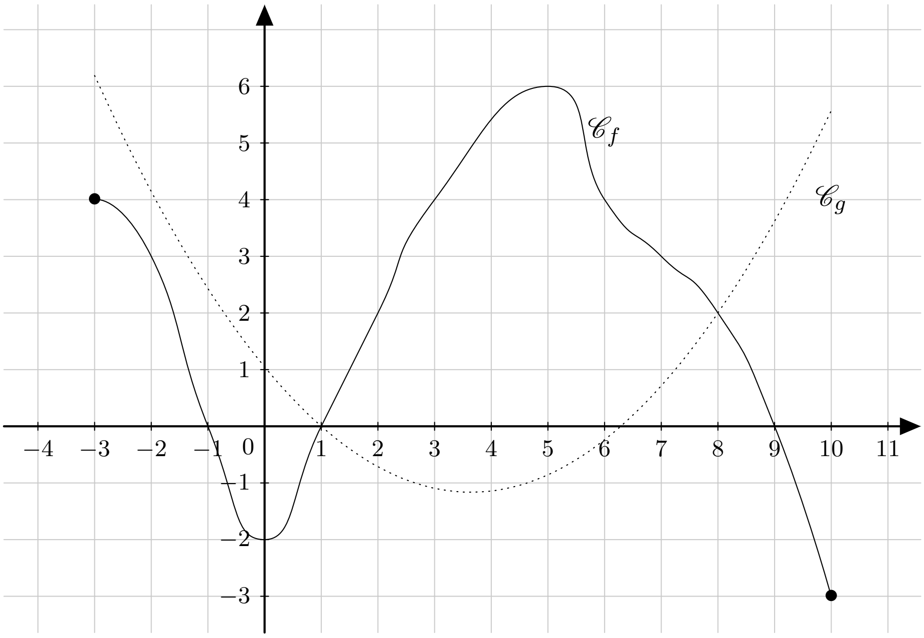
Minimum	Q_1	Médiane	Q_3	Maximum
1	3	5	8	12

1. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
   (a) 1 point le vendredi, la moitié des clients attendent au moins cinq minutes en caisse.
   C'est vrai car la médiane est de 5 minutes.
   (b) 1 point le vendredi, au moins un quart des clients attendent au plus trois minutes en caisse.
   C'est vrai car le premier quartile est de 3 minutes.

2. 1 point Les clients qualifient d'acceptable un temps d'attente inférieur à 8 minutes (incluses). Les informations connues permettent-elles d'affirmer qu'il y a autant de clients qui trouvent le temps d'attente acceptable le lundi que le vendredi ? Justifier.
L'effectif cumulé croissant associé à la valeur 8 pour la série du lundi est de $14+13+23+9+14+8+12+4=97$ clients. Environ 97% des clients du lundi trouvent le temps d'attente acceptable.
Le vendredi cela correspond à au moins 75% des clients soit environ 75 clients.
Il y a à priori plus de clients qui trouvent le temps d'attente acceptable le lundi que le vendredi.

Exercice 2 *(~ 15 points)*

1. On a tracé les courbes représentatives d'une fonction f en trait plein et d'une fonction g en pointillés, toutes deux définie sur l'intervalle $[-3\,;\,10]$.



(a) $2\times 0,5$ point Compléter les phrases suivantes lorsque cela est possible :
- ▷ l'image de -3 par la fonction f est : 4,
- ▷ l'image de 0 par la fonction f est : -2.

(b) $2\times 0,5$ point Compléter les phrases suivantes lorsque cela est possible :
- ▷ les antécédents de 0 par la fonction f sont -1 ; 1 et 9,
- ▷ l'antécédent de 6 par la fonction f est : 5.

(c) 1 point Compléter : $f(-3)=4$ et $f(0)=-2$.

(d) 1 point On considère le point G de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est 0. Quelles sont les abscisses possible de G (justifier brièvement).
Les points qui sont sur la courbe de la fonction f ont leurs coordonnées de la forme $(x\ ;\ f(x))$.
Les abscisses possibles de G sont donc les antécédents de 0 par f.
Ce sont donc -1 ; 1 et 9.

(e) 2×1 point Résoudre les équations suivantes, si possible :
- ▷ Équation $f(x)=0$: $\mathscr{S}_1=\{-1\ ;\ 1\ ;\ 9\}$
- ▷ Équation $f(x)=g(x)$: $\mathscr{S}_2=\{1\ ;\ 8\}$.

(f) 2×1 point Résoudre les inéquations suivantes, si possible :
- ▷ Inéquation $f(x)\leq 6$: $\mathscr{S}_3=[-3\ ;\ 10]$
- ▷ Inéquation $f(x)<g(x)$: $\mathscr{S}_4=[-3\ ;\ 1[\bigcup]8\ ;\ 10]$

(g) 1,5 point (1 point 1 erreur, 0,5 entre deux et trois, 0 sinon) Compléter le tableau de variations de la fonction f suivant :

x	-3		0		5		10
f	4	↘	-2	↗	6	↘	-3

2. Voici le tableau de variations d'une fonction h définie sur $[-8; 8]$, n'étant pas représenté sur le graphique précédent et n'ayant aucun lien avec les fonctions étudiées précédemment.

   a) 4 × 1 point Cocher les bonnes réponses dans le tableau suivant. On n'oubliera pas d'expliquer brièvement le raisonnement qui vous a amené à cocher votre case !

x	-8		-5		-2		2		8
h	1	↗	3	↘	-2	↗	1	↘	-3

	Vrai	Faux	On ne peut pas répondre
ⓐ $h(3) = -5$		X	
ⓑ $h(-4) \geq (-2)$	X		
ⓒ $2 < h(5) < 8$		X	
ⓓ $h(2) = 1$	X		

① Faux car le minimum de la fonction est -3 et $-3 > -5$.
② Vrai car la fonction h est décroissante sur $[-5 ; -2]$ et $-5 < -4 < -2$.
③ Faux car $2 < 5 < 8$ et la fonction h est strictement décroissante sur $[2 ; 8]$. On peut donc conclure que $h(2) \geqslant h(5)$ et donc que $1 \geqslant h(5)$.
④ Vrai par construction du tableau de variations.

   b) 1,5 point Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$.

   ▷ Sur $[-8 ; -5]$, le minimum de la fonction est 1 donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

   ▷ Sur $[-5 ; -2]$, la fonction est continue (on n'a pas besoin de lever le crayon pour tracer sa courbe). Elle ne change pas de sens de variation (elle est toujours décroissante) et on a $h(-5) = 3 > 0$ et $h(-2) = -2 < 0$.
   On peut donc conclure (le théorème utilisé s'appelle le Théorème des Valeurs Intermédiaires) que $h(x) = 0$ pour un unique $x \in [-5 ; -2]$.

   ▷ On peut appliquer le même raisonnement sur les intervalles $[-2 ; 2]$ et $[2 ; 8]$ pour conclure que l'équation $h(x) = 0$ a exactement trois solutions.

Exercice 3 *($\sim$ 8 points)*

On considère deux fonctions définies pour tout réel x par :

$$f(x) = -x - 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -3x^2 + x + 4$$

Dans cet exercice, tout résultat obtenu avec la calculatrice ne rapportera aucun point. Vous veillerez donc à détailler vos étapes de calculs.

1. 1,5 point 1 calcul et 0,5 reconnaissance de $g(-3/2)$ Quelle est l'image de $-\dfrac{3}{2}$ par la fonction g ? Détaillez les calculs (n'écrire que le résultat donné par la calculatrice ne rapportera aucun point).

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{3}{2}\right) &= -3 \times \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 4 \\ &= -3 \times \frac{(-3)^2}{2^2} - \frac{3}{2} + \frac{16}{4} \\ &= \frac{-27}{4} - \frac{6}{4} + \frac{16}{4} \\ &= \frac{-17}{4}. \end{aligned}$$

2. 2,5 points (1 pour la caractérisation des coordonnées, 1 pour le calcul e t0,5 conclusion Le point M de coordonnées $\left(\sqrt{3}-1; \sqrt{3}-3\right)$ appartient-il à la courbe représentative de g ? Justifier.

Le point de la courbe représentative de g dont l'abscisse est $\sqrt{3}-1$ est le point dont l'ordonnée est $g\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Or, $$\begin{aligned} g\left(\sqrt{3}-1\right) &= -3 \times \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \left(\sqrt{3}-1\right) + 4 \\ &= -3 \times \left(\sqrt{3}^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2\right) - \sqrt{3} + 1 + 4 \\ &= -3 \times 3 + 6\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} + 5 \\ &= 5\sqrt{3} - 7. \end{aligned}$$

Le point M n'est donc pas sur la courbe représentative de g.

3. 2 points Montrer que pour tout réel x, $g(x) = (3x-4)(-x-1)$.

Soit x $\in \mathbb{R}$.

On a : $(3x-4)(-x-1) \;=\; -3x^2 - 3x + 4x + 4 \;=\; -3x^2 + x + 4 \;=\; g(x)$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = (3x-4)(-x-1)$.

4. 2 points Factoriser $g(x) - f(x)$ pour tout réel x.

Soit x $\in \mathbb{R}$.

On a $$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (3x-4)(-x-1) - (-x-1) \\ &= (-x-1)(3x-4-1) \\ &= (-x-1)(3x-5). \end{aligned}$$

5. +2 points **Question bonus (à ne traiter qu'après n'avoir essayé toutes les questions du sujet :** Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = f(x)$.

$g(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; g(x) - f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (-x-1)(3x-5) = 0$.

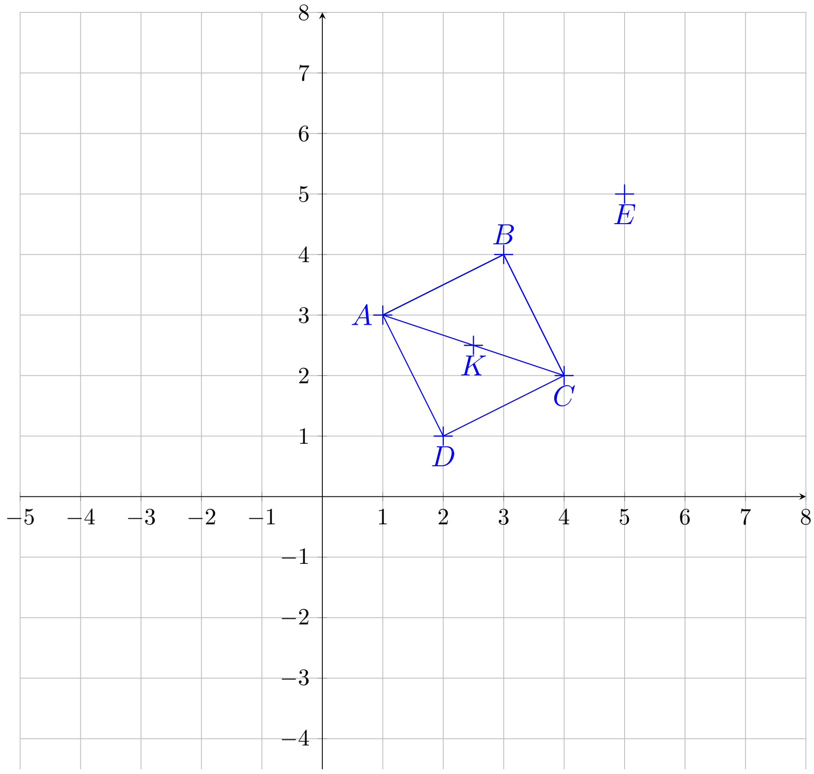
D'après la règle du produit nul, ceci est équivalent à résoudre les deux équations suivantes :

- $-x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1$ et
- $3x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{5}{3}$.

L'équation $g(x) = f(x)$ a donc deux solutions réelles : -1 et $\dfrac{5}{3}$.

Exercice 4 $\sim$ *13 points*

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A\,(1;3)$, $B\,(3;4)$ et $C\,(4;2)$. **Dans cet exercice, les lectures graphiques seules ne rapporteront que très peu, voir pas de points.**



1. 1,5 point (-0,5 par erreur ou oubli mais 0,25 si juste A, B et C et bien placés) Placer les points A, B et C dans les repère ci-dessus. **On complétera la figure tout au long de l'exercice.**
2. (a) $1,5$ point (1 pour la formule et 0,5 pour les calculs) Déterminer les coordonnées de K, milieu de $[AC]$.

   Par formule de cours, on a $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+4}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

   (b) 2,5 points (1 pour la propriété des diagonales, 0,75 pour les équations et 0,75 pour la résolution) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Or les diagonales de $ABCD$ sont $[AC]$ et $[BD]$.
   On sait donc que K est le milieu de $(BD]$.
   On a donc : $x_K = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{3 + x_D}{2} \Leftrightarrow x_D + 3 = 5 \Leftrightarrow x_D = 2$.
   De même, $y_K = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{4 + y_D}{2} \Leftrightarrow y_D + 4 = 5 \Leftrightarrow y_D = 1$.
   Le point D a donc pour coordonnées $D\,(2\ ;\ 1)$.
3. $2,5$ points (1 pour le lien avec le milieu et 1,5 pour les équations et la résolution) On considère le point E, symétrique de A par rapport à B. Déterminer les coordonnées de E.
   Si E est le symétrique de A par rapport à B, cela signifie que B est le milieu du segment $[AE]$.
   On a donc :
   - $x_B = \dfrac{x_A + x_E}{2} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{1 + x_E}{2} \Leftrightarrow x_E = 3 \times 2 - 1 = 5$.
   - $y_B = \dfrac{y_A + y_E}{2} \Leftrightarrow 4 = \dfrac{3 + y_E}{2} \Leftrightarrow y_E = 4 \times 2 - 3 = 5$

   Le point E a donc pour coordonnées $E\,(5\ ;\ 5)$.
4. (a) $1,5$ points (0,5 pour la formule et 1 pour les calculs) Calculer les distances AC, AD et DC.

   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$DC = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

(b) 2 points 1 pour isocèle et 1 pour rectangle Quelle est la nature du triangle ADC ?
D'après la question précédente, on peut dire que ADC est isocèle en D.
Par ailleurs, $AD^2 + DC^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2 = 5 + 5 = 10$ et $AC^2 = \sqrt{10}^2 = 10$.
La réciproque du théorème de Pythagore nous permet de conclure que ADC est également rectangle en D.
Finalement, ADC est rectangle et isocèle en D.

(c) 1,5 point Conclure sur la nature la plus précise possible du parallélogramme $ABCD$.
D'après la question précédente, le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de même longueur. C'est donc un carré.

Exercice 5 *(∼ 4 points)*

En prévision d'une course à vélo, Jeannie suit le programme d'entrainement suivant sur douze samedis : elle parcourt 25 kilomètres le premier samedi, puis augmente chaque semaine de 11 kilomètres la distance parcourue.

1. $2 \times 0,5$ point Déterminer la distance D parcourue le deuxième samedi et la distance totale T parcourue au bout de deux samedis d'entrainement.
   - ▷ Le deuxième samedi, Jeannie a parcourue $25 + 11 = 36$km.
   - ▷ Au bout de deux samedis d'entrainement, elle aura donc parcourue $25 + (25 + 11) = 61$km.
2. 3 points : $4 \times 0,75$ (0,25 si initialisations à 0 ?) Les deux algorithmes ci-dessous ont le même usage. L'un est écrit dans le langage naturel et le second en langage Python.
   Compléter au moins un des deux algorithmes afin que le programme donne en fin d'algorithme la distance totale parcourue au bout des douze samedis d'entrainement.

   En langage naturel :

Variables	D et T sont des nombres réels et I un entier
Traitement	AFFECTER la valeur 25 à D
	AFFECTER la valeur 25 à T
	Pour I variant de 2 à 12
	AFFECTER la valeur $D + 11$ à D
	AFFECTER la valeur $T + D$ à T
	FIN POUR
Sortie	AFFICHER T

   En langage Python

   ```
   D = 25
   T = 25
   for i in range(2,13) :
       D = D + 11
       T = T + D

   print(T)
   ```
3. +2 points *Bonus, à ne traiter qu'après avoir fini toutes les autres questions :* Programmer cet algorithme sur votre calculatrice et donner la distance totale parcourue par Jeannie à la fin des douze samedis d'entrainement.
   À la fin des douze samedis d'entrainements, Jeannie aura parcouru 1 026km.

Fin du sujet.

« *Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.* »
Jean-Marie Souriau