Classe : Seconde
Calculatrice : ⊖
Durée : 1 heure

Devoir surveillé n°1

Exercice 1 | 4 points

1. Écris sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers.

a) $\dfrac{77^5 \times 121}{49}$

b) $\dfrac{8^4 \times \left(2^{11}\right)^2}{32}$

2. Écris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}+c$ ou $a\sqrt{b}$, b le plus petit possible :

a) $\sqrt{42}\sqrt{24}$

b) $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{32}-3)$

Correction

1. a)

$$\begin{aligned}\frac{77^5 \times 121}{49} &= \frac{(7\times 11)^5 \times 11^2}{7^2}\\ &= \frac{7^5 \times 11^5 \times 11^2}{7^2}\\ &= 7^5 \times 11^5 \times 11^2 \times 7^{-2}\\ &= 7^3 \times 11^7\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{8^4 \times \left(2^{11}\right)^2}{32} &= \frac{\left(2^3\right)^4 \times \left(2^{11}\right)^2}{2^5}\\ &= \frac{2^{12}\times 2^{22}}{2^5}\\ &= 2^{12}\times 2^{22}\times 2^{-5}\\ &= 2^{12+22-5}\\ &= 2^{29}\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}\sqrt{42}\sqrt{24} &= \sqrt{2\times 3\times 7}\sqrt{2^3\times 3}\\ &= \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{2^3}\sqrt{3}\\ &= \sqrt{2}\sqrt{2}^3\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{7}\\ &= \sqrt{2}^4\sqrt{3}^2\sqrt{7}\\ &= 2^2\times 3\sqrt{7}\\ &= 12\sqrt{7}\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2}+2)(\sqrt{32}-3) &= \sqrt{2}\sqrt{32}+\sqrt{2}\times(-3)+2\sqrt{32}+2\times(-3)\\
&= \sqrt{2}^{6}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}^{5}-6\\
&= 2^3-3\sqrt{2}+2\times 2^2\sqrt{2}-6\\
&= 8-6-3\sqrt{2}+8\sqrt{2}\\
&= 2+5\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 | 8 points

1. Donne un nombre, sans justification, qui est :

- **a)** un nombre réel mais pas rationnel.
- **b)** un nombre rationnel mais pas décimal.
- **c)** un nombre entier relatif mais pas entier naturel.

2. Traduis mathématiquement les appartenances suivantes :

- **a)** x appartient à l'ensemble des nombres rationnels.
- **b)** x est un nombre réel non-nul.
- **c)** x est un nombre réel compris entre -4, inclus, et 2, exclu.

3. Dans chaque cas, écris, à l'aide d'un intervalle, l'ensemble des nombres réels :

- **a)** supérieurs ou égaux à 5.
- **b)** x tels que : $-\pi < x \leqslant 2\pi$.

4. Représente sur la droite réelle :

- **a)** l'intervalle $I = [-5;3]$.
- **b)** l'intervalle $J =]-\infty;7[$.
- **c)** $I \bigcup J$.
- **d)** $I \bigcap J$.

5. Donne un exemple d'intervalles I et J tels que l'intersection $I \bigcap J$ n'est pas un intervalle.

Correction

1.
- **a)** π et $\sqrt{2}$ sont réels mais non rationnels.
- **b)** $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal (voir cours pour la démonstration) mais est rationnel.
- **c)** -2, -10 et -7 sont des nombres entiers relatifs strictement négatifs donc non-naturels.

2.
- **a)** $x \in \mathbb{Q}$
- **b)** $x \in \mathbb{R}^*$
- **c)** $x \in [-4;2[$

3.
- **a)** $[5;+\infty[$
- **b)** $]-\pi;2\pi]$

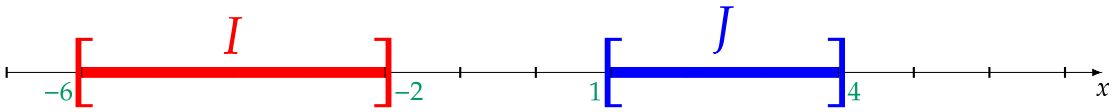
4.
- **a)** $I = [-5,3]$

b) $J =]-\infty;7[$

c) Remarquons que $I \subset J$ et donc $I \bigcup J$ étant l'ensemble des éléments de I ou de J (et donc aussi des deux en même temps), on a ainsi : $I \bigcup J = J$

d) De même, $I \subset J$ donc $I \bigcap J$ étant l'ensemble des éléments à la fois de I et de J, on a : $I \bigcap J = I$

5. On va construire une intersection **vide** en choisissant deux intervalles I et J qui n'ont aucun élément en commun. Ainsi, on aura $I \bigcap J = \varnothing$. $I = [-6;-2]$ et $J = [1;4]$ conviennent.



Exercice 3 | 8 points

1. Dans chaque cas, développe et réduis.

a) $(x+4)^2$

b) $(-2x+4)^2$

c) $(2x-10)^2$

d) $(10x-2)(10x+2)$

2. Résous, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $27x = 12x + 15$

b) $\sqrt{2}x - x = 1$

c) $\dfrac{3x}{5} = -15$

d) $x^2 + 4x + 2 = x^2 - 4x + 2$

Correction

1. a)

$$\begin{aligned}(x+4)^2 &= x^2 + 2\times x\times 4 + 4^2\\ &= x^2 + 8x + 16\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(-2x+4)^2 &= (-2x)^2 + 2\times(-2x)\times 4 + 4^2\\ &= 4x^2 - 16x + 16\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(2x-10)^2 &= (2x)^2 - 2\times(2x)\times 10 + 10^2\\ &= 4x^2 - 40x + 100\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(10x-2)(10x+2) &= (10x)^2 - 2^2 \\ &= 100x^2 - 4\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned} & 27x = 12x + 15 \\ \iff & 27x - 12x = 12x - 12x + 15 \\ \iff & 15x = 15 \\ \iff & \frac{15x}{15} = \frac{15}{15} \\ \iff & x = 1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 est l'unique solution de } 27x = 12x + 15 \text{ dans } \mathbb{R}.}$

b)

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}x - x = 1 \\ \iff & \sqrt{2} \times x - 1 \times x = 1 \\ \iff & (\sqrt{2} - 1)x = 1 \\ \iff & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ \iff & x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles de $\sqrt{2}x - x = 1$ est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}.}$

c)

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{5} = -15 \\ \iff & 3x = -15 \times 5 \\ \iff & x = \frac{-15 \times 5}{3} \\ \iff & x = -25 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \{-25\}.}$

d)

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 2 = x^2 - 4x + 2 \\ \iff & x^2 + 4x + 2 - x^2 - 2 = x^2 - 4x + 2 - x^2 - 2 \\ \iff & 4x = -4x \\ \iff & 8x = 0 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{0 est l'unique solution dans } \mathbb{R}.}$