NOM : . . . . Prénom : . . . . Classe : . . . .

Corrigé Devoir commun de Mathématiques

Février 2023
Durée : 2 heures

Le sujet comprend …. pages, numérotées de 1 à …..

Les exercices pourront être traités dans n'importe quel ordre.
Vous traiterez au choix l'exercice 3 ou bien l'exercice 3 Bis

L'utilisation d'une **unique calculatrice** est **autorisée**.

Tout échange de matériel entre candidats est interdit.

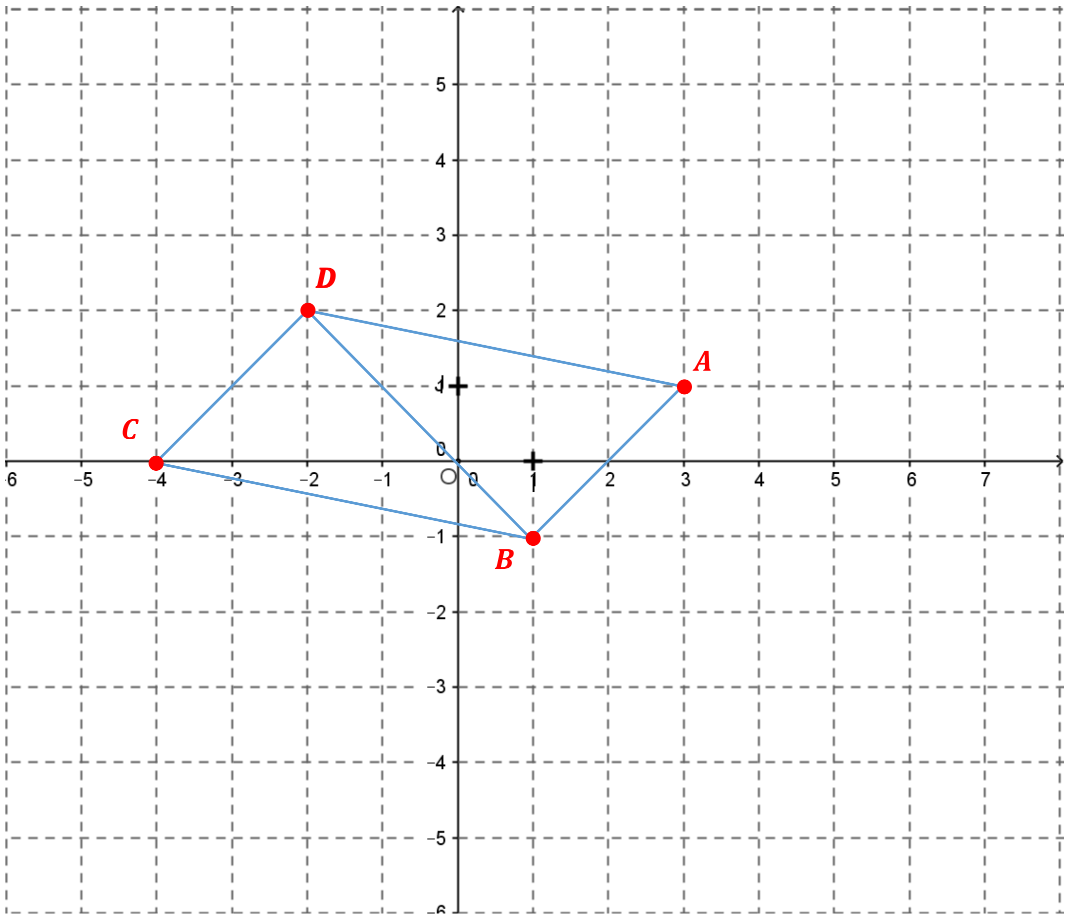
Sauf indication contraire, les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements auront une rôle majeur dans l'appréciation de la copie.
Ainsi, toute réponse non justifiée (sauf mention contraire dans l'énoncé) ne pourra donner tous les points possibles.

Toute sortie est interdite avant 1h 50 de composition.

Exercice 1

La figure sera construite dans le repère ci-dessous

Toutes les réponses seront soigneusement justifiées.



Dans le repère orthonormé (O, I, J) d'unité 1 cm, on considère les points $A(3; 1)$, $B(1; -1)$ $C(-4; 0)$ et D $(-2\,; 2)$

1. Placer dans le repère les points A, B, C et D.

2. a. Calculer les coordonnées du point M, milieu du segment $[AC]$.

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{3 + (-4)}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0,5 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1 + 0}{2} = 0,5 \end{cases}$$

b. Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Soit L le milieu du segment $[DB]$:

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{x_D + x_B}{2} = \dfrac{-2 + 1}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0,5 = x_M \\ y_L = \dfrac{y_D + y_B}{2} = \dfrac{-1 + 2}{2} = 0,5 = y_M \end{cases}$$

Ainsi, les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu, les quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme.

3. a. Calculer la valeur exacte de la longueur AB.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

b. Montrer que le triangle ABD est rectangle (on précisera en quel sommet), puis déterminer une valeur approchée à un degré près de l'angle $\widehat{BAD}$.

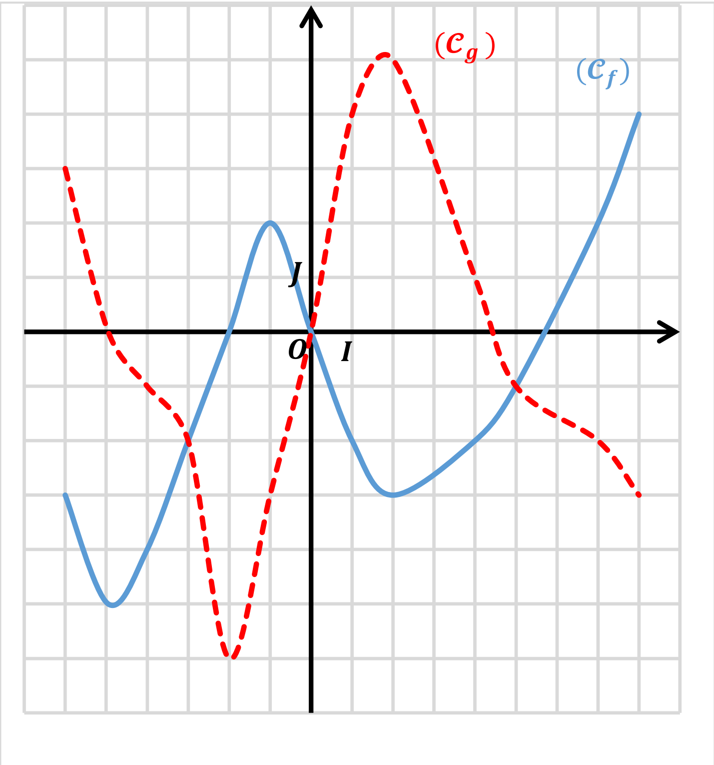
$$\begin{cases} AB = \sqrt{8} \\ BD = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} \\ AD = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \end{cases}$$

Or $AB^2 + BD^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{18})^2 = 8 + 18 = 26$ et $AD^2 = (\sqrt{26})^2$ **donc** $AD^2 = AB^2 + BD^2$**,** d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABD est rectangle en B**.**

$$tan(\widehat{BAD}) = \frac{opp}{adj} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \widehat{BAD} = tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}\right) \approx 56,3°$$

Exercice 2

On donne ci-dessous les représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-6\,;\,8]$.



Avec la précision permise par la lecture graphique, compléter :

a. L'image par f de 8 est 4.

b. Les antécédents de 2 par f sont -1 et 7

c. $g(-4) = -1$

d. $f(x) < 0$ sur $[-6; -2[\cup]0; 5,75]$

e. L'équation $f(x) = -2$ a pour ensemble de solutions $S = \{-3; 1; 4\}$

f. L'équation $f(x) = g(x)$ a pour ensemble de solutions $S = \{-3; 0; 5\}$

g. L'inéquation $f(x) \geq 4,5$ a pour ensemble de solutions $S = \emptyset$

h. L'inéquation $f(x) > g(x)$ a pour ensemble de solutions $S =]-3; 0[\cup]5; 8]$

x	-6		-2		2		8
$g(x)$	3	↘	-6	↗	5	↘	-3

3. Compléter avec les symboles $>$ ou $<$ ou $=$, pour comparer les réels ci-dessous.

$g(-1) < g(1)$	$g(-5) = g(0)$	$f(-4,5) < g(0)$	$f(-0,5) > f(5)$

<u>Vous traiterez au choix l'exercice 3 ou bien l'exercice 3 Bis</u>

Exercice 3

Une société loue des photocopieuses de deux marques différentes, à différents lycées de la région.
Le directeur de la société a relevé le nombre de pannes qui ont nécessité l'intervention d'un technicien sur chacune des photocopieuses. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Marque A	4	5	8	8	6	3	0	1	0
Marque B	2	4	8	8	6	5	4	0	2

1. Compléter les lignes des Fréquences et des Fréquences Cumulées Croissantes (FCC) (résultats arrondis au centième) du tableau suivant :

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Marque A	4	5	8	8	6	3	0	1	0	35
Fréquences	$\frac{4}{35}$	$\frac{5}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{0}{35}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{0}{35}$	1
FCC	$\frac{4}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{25}{35}$	$\frac{31}{35}$	$\frac{34}{35}$	$\frac{34}{35}$	$\frac{35}{35}$	$\frac{35}{35}$	

On donne le tableau des fréquences et fréquence cumulées croissantes de la répartition des photocopieurs de la marque B

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Marque B	2	4	8	8	6	5	4	0	2	39
Fréquences en %	5,13%	10,26%	20,51%	20,51%	15,38%	12,82%	10 ,26%	0%	5,13%	100%
FCC en %	5,13	15,39	35,9	56,41	71,79	84,61	94,87	94,87	100	

2. Quel est le pourcentage des photocopieurs de la marque A ayant strictement moins de 3 interventions ?

$$\frac{4+5+8}{35}\times 100=\frac{17}{35}\times 100\approx 48,6\%$$

3. Quel est le pourcentage des photocopieurs de la marque B ayant strictement plus de 4 interventions ?

$$\frac{5+4+0+2}{39}\times 100=\frac{11}{39}\times 100\approx 28,2\%$$

4. Donner la moyenne (écrire la formule de calcul) et l'écart type (pas besoin d'écrire la formule de calcul) de chaque série.

$$\overline{x_A}=\frac{0\times 4+1\times 5+2\times 8+3\times 8+4\times 6+5\times 3+6\times 0+7\times 1+8\times 0}{35}=2,6\ ;\ \sigma_A\approx 1,62$$

$$\overline{x_B}=\frac{0\times 2+1\times 4+2\times 8+3\times 8+4\times 6+5\times 5+6\times 4+7\times 0+8\times 2}{39}\approx 3,41\quad ;\quad \sigma_B\approx 1,94$$

5. Déterminer la médiane et l'écart interquartile de chaque série. Justifier.

Marque A :

Médiane :

Il y a $\mathbf{35}$ photocopieurs de marque A, c'est un nombre impair, il y a donc une valeur centrale et la médiane correspond à la $\frac{35+1}{2}=18^{ème}$ valeur. D'après le tableau :$Me=3$ interventions

Premier quartile :

$0,25\times 39=8,75$. Le 1ier quartile correspond donc à la 9ième valeur : $Q_1=1$ intervention

Troisième quartile :

$0,75\times 35=26,25$. Le 3ième quartile correspond à 27ième valeur : $Q_3=4$

Ecart interquartile : $Q_3-Q_1=4-1=3$

Marque B :

Médiane :

Il y a $\mathbf{39}$ photocopieurs de marque B, c'est un nombre impair, il y a donc une valeur centrale et la médiane correspond à la $\frac{39+1}{2}=20^{ème}$ valeur. D'après le tableau :$Me=3$ interventions

Premier quartile :

$0,25 \times 39 = 9,75$. Le 1ier quartile correspond donc à la $10^{\text{ième}}$ valeur : $Q_1 = 2$ interventions

Troisième quartile :

$0,75 \times 39 = 29,25$. Le 3ième quartile correspond à $30^{\text{ième}}$ valeur : $Q_3 = 5$ interventions

Ecart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 5 - 2 = 3$

6. Quelle marque de photocopieuse semble être la plus fiable ? Pourquoi ?
   La Photocopieuse de marque A semble la plus fiable car elle a une moyenne d'intervention qui est inférieure à celle de la marque B et son écart-type est également inférieur : cela signifie que le nombre d'interventions de la marque A est plus centré autour de la moyenne que celui de la marque B.
7. Quel est le nombre moyen d'interventions sur l'ensemble des deux photocopieuses ?
   Il suffit de faire la moyenne des deux moyennes, on obtient $\overline{X} = \frac{\overline{x_A}+\overline{x_B}}{2} \approx 3$ interventions

Exercice 3Bis

On donne ci-dessous un algorithme et son implémentation en langage Python.

Pseudo-code :

```
Variables : a (entier), b (entier), c (entier),
            m (entier)
Afficher("Entrez successivement trois entiers.")
Saisir(a)
Saisir(b)
Saisir(c)
Si a > b :
    Si a > c :
        m ← a
    Sinon :
        m ← c
    Fin Si
Sinon :
    Si b > c :
        m ← b
    Sinon :
        m ← c
    Fin Si
Fin Si
Afficher(m)
```

Python :

```python
print("Entrez successivement trois entiers.")
a=int(input())
b=int(input())
c=int(input())
if a > b :
    if a > c :
        m = a
    else :
        m = c
else :
    if b > c :
        m = b
    else :
        m = c
print(m)
```

1. Qu'affiche ce programme si l'utilisateur saisit successivement les valeurs 12 ; 15 et 19 ?
   Il affiche $m = 19$
2. Qu'affiche ce programme si l'utilisateur saisit successivement les valeurs -5 ; 3 et 1 ?
   Il affiche $m = 3$
3. Que fait ce programme ? (Indiquer son but général, pas son fonctionnement ligne par ligne).
   Il renvoie le maximum des trois nombres

Exercice 4 :

1. On considère l'expression $A(x) = (3x+4)^2 - (3x+4)(-2x+1)$.

Développer et réduire autant que possible $A(x)$.

$A(x) = (3x+4)^2 - (3x+4)(-2x+1)$

$= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 - (3x \times (-2x) + 3x \times 1 + 4 \times (-2x) + 4 \times 1)$

$= 9x^2 + 24x + 16 - (-6x^2 - 5x + 4) = 9x^2 + 24x + 16 + 6x^2 + 5x - 4 = 15x^2 + 29x + 12$

2. Factoriser l'expression $x^2 - 8x + 16$.

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x-4)^2$$

3. Résoudre les équations suivantes (on simplifiera les résultats autant que possible) :

a) $4x + 3 = -2$

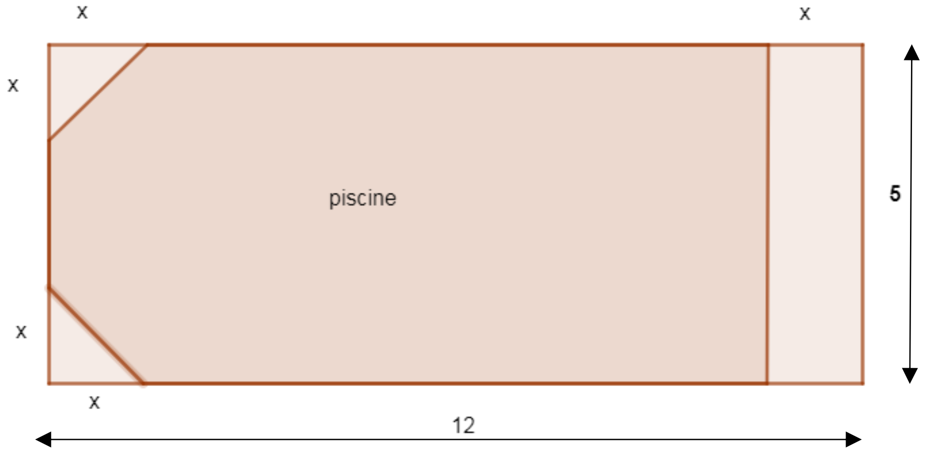
$$4x + 3 = -2 \Leftrightarrow 4x = -2 - 3 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4} \longrightarrow S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

b) $\frac{4}{3}x - \frac{5}{4} = x + \frac{1}{12}$

$$\frac{4}{3}x - \frac{5}{4} = x + \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{4}{3}x - x = \frac{1}{12} + \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{3}x - \frac{3}{3}x = \frac{1}{12} - \frac{3 \times 5}{3 \times 4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x - 3x}{3} = \frac{1 - 15}{12} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{14}{12} \Leftrightarrow x = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \longrightarrow S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$$

Exercice 5 :

On construit une piscine dans un jardin. La surface de cette piscine est obtenue en retirant d'un rectangle de 12 mètres sur 5 mètres, deux triangles rectangles isocèles **et** un rectangle de x mètres sur 5mètres, comme indiqué sur la figure ci-dessous avec x appartenant à l'intervalle $[0; 2{,}5]$



4. Montrer que l'aire $A(x)$ de la piscine exprimée en m^2, a pour expression : $A(x) = -x^2 - 5x + 60$

pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0; 2,5[$

Soit x un réel dans l'intervalle $]0; 2,5[$

$$A(x) = 12 \times 5 - \frac{x \times x}{2} - \frac{x \times x}{2} - 5 \times x = -\frac{2x^2}{2} - 5x + 60 = -x^2 - 5x + 60$$

2. Montrer que $A(x) = -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4}$ pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0; 2,5[$

Soit x un réel dans l'intervalle $]0; 2,5[$

$$-\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4} = -\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + \frac{265}{4} = -x^2 - 5x - \frac{25}{4} + \frac{265}{4} = -x^2 - 5x + \frac{240}{4}$$
$$= -x^2 - 5x + 60 = A(x)$$

4. On ne dispose ~~des~~ matériaux que pour construire une piscine d'aire $50,25$ m².

a. Montrer que $A(x) = 50,25$ équivaut à $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0$

Soit x un réel dans l'intervalle $]0; 2,5[$

$$A(x) = 50,25 \Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4} = 50,25 \Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{265}{4} - 50,25 = 0 \Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 16 = 0$$

b. Factoriser $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16$:

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4^2=\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)-4\right)\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)+4\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}\right)$$

c. Résoudre l'équation $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16=0$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{3}{2}=0 \\ \text{ou} \\ x+\dfrac{13}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}=1,5 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{13}{2}=-6,5 \end{cases} \longrightarrow S=\left\{\frac{3}{2};-\frac{13}{2}\right\}$$

4. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire de la piscine sera égale à 50,25 m^2.

D'après les questions précédentes,

$A(x)=50,25$ équivaut à $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-16=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{13}{2}\right)=0 \longrightarrow S=\left\{\frac{3}{2};-\frac{13}{2}\right\}$. Parmi les deux solutions, une seule appartient à l'intervalle $]0;2,5[$, la seule solution pour que l'aire de la piscine soit égale à $50,25$ m^2 est $x=1,5$ m.