7

Vecteurs du plan

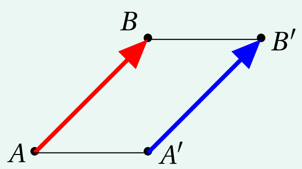
Résumé

Nous allons découvrir les vecteurs dans un cadre simple : le plan. Trouvant ses origines en physique pour représenter des déplacements ou des forces, tout physicien ou ingénieur manipule des vecteurs quotidiennement.

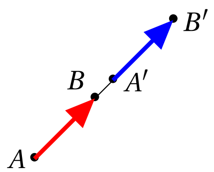
1 Translations et vecteurs

Définition | Translation

Soient A et B deux points distincts du plan.
Pour tout point A' du plan, on construit l'unique point B' tel que $ABB'A'$ soit un parallélogramme. On dit alors que le point B' est l'image du point A' par la translation qui transforme A en B.
Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



Exemple Dans le cas particulier où A, B et A' sont alignés, nous avons la configuration suivante, où la parallélogramme est plat.



Propriété

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ matérialise le **déplacement rectiligne** de A vers B caractérisé par :

- sa **direction**, celle de (AB) ;
- son **sens**, celui de A vers B ;
- sa **norme** $\|\overrightarrow{AB}\|$, la longueur AB.

2 Égalité de deux vecteurs

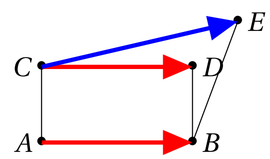
Définition

Lorsque la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux et on le note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

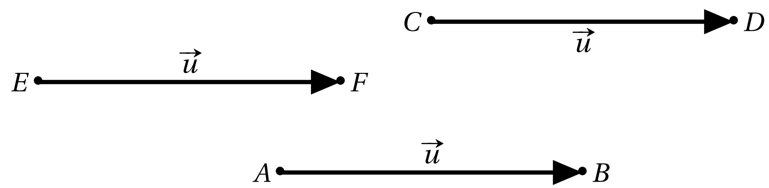
Propriété

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

Exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne le sont pas.



Remarque On considère la situation suivante.



Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$, comme, entre autres, $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$. On peut le noter $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Définition | Vecteur nul

La translation qui transforme le point A en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$. Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.
Ainsi,

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

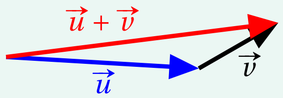
Attention

Ce vecteur nul ne possède ni sens ni direction mais sa norme $\|\vec{0}\|$ est égale à 0.

3 Somme de vecteurs

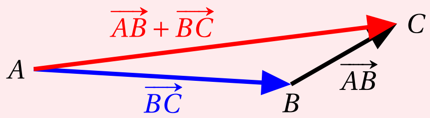
Définition | Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



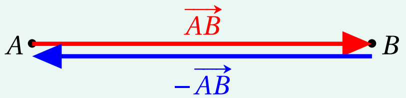
Théorème | Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Définition | Opposé

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non-nul. Alors le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.



Remarque L'opposé du vecteur nul est le vecteur nul.

$$-\vec{0} = \vec{0}$$

Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Démonstration. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ donc par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. □

4 Produit par un réel

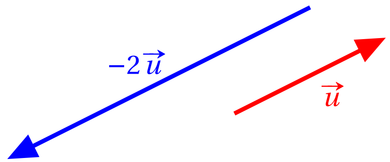
Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul et $k \in \mathbb{R}^*$. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

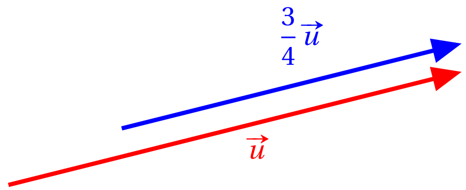
- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$;
- pour norme $k\|\vec{u}\|$ si $k > 0$, $-k\|\vec{u}\|$ si $k < 0$.

Exemples

- $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$



- $\left\|\frac{3}{4}\vec{u}\right\| = \frac{3}{4}\|\vec{u}\|$



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k, k' des réels.

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

5 Vecteurs et coordonnées

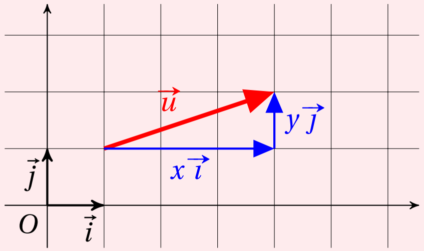
5.1 Coordonnées d'un vecteurs

Définitions | Repère et base orthonormée

Soient O un point et deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormée** du plan et que $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un **repère orthonormé** du plan.

Propriété | Décomposition dans une base orthonormée

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe x et y deux réels, uniques, tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.



Démonstration. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées $(x; y)$ de M dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont uniques et $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. □

Remarque On donnera les **coordonnées** x et y de $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en écrivant $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. Soit le point $A(1;1)$. Placer B tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Remarque Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées dans une même base orthonormée sont égales.

5.2 Opérations sur les vecteurs

Propriété | Somme

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Alors, $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Démonstration. On décompose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

et

$$\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$$

Ainsi, $\vec{u} + \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (x+x')\vec{\imath} + (y+y')\vec{\jmath}$. □

Propriété | Produit par un réel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et k un réel.

Alors, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Démonstration. Comme pour la démonstration précédente, $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ donc $k\vec{u} = kx\vec{\imath} + ky\vec{\jmath}$. □

5.3 Conséquences

Théorème

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Démonstration. Remarquons d'abord que O a pour coordonnées $(0;0)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Ensuite, regardons $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\overrightarrow{OA}$ se décompose en

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{\imath} + y_A \vec{\jmath}$$

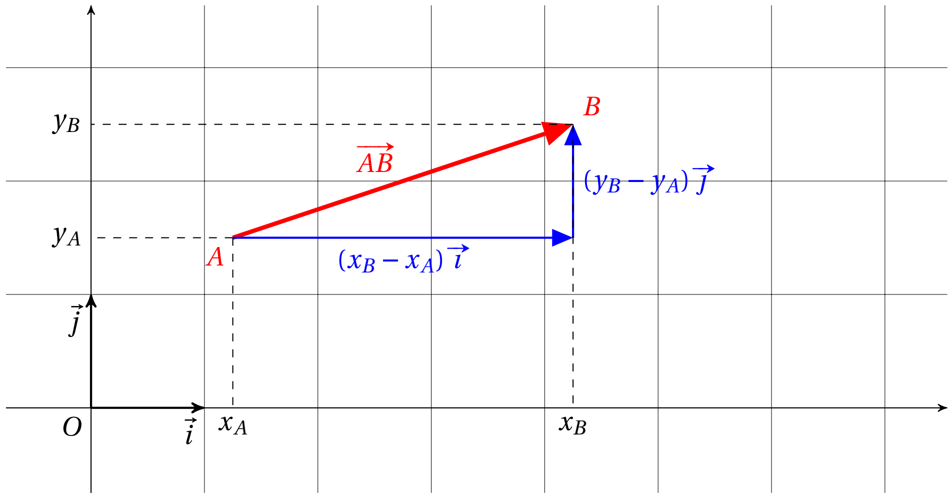
et de même,

$$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{\imath} + y_B \vec{\jmath}.$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.
Donc, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
Finalement, le calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se fait grâce aux propriétés sur les coordonnées vues précédemment. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. □

Exemples

- On visualise le résultat précédent sur le repère suivant :



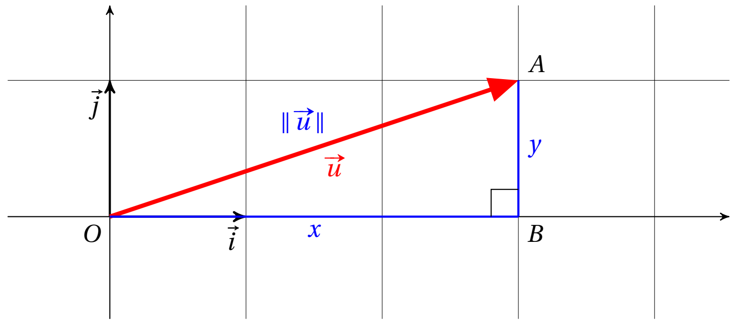
- Soient $A(1;4)$ et $B(8;-1)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8-1 \\ (-1)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Théorème | Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration. On appelle A le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et B le point tel que $x\vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$.
Le triangle OBA ainsi formé est un triangle en B tel que $OA = \|\vec{u}\|$, $OB = x$ et $BA = y$.



Par le théorème de Pythagore, nous avons :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

et donc,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

car $\|\vec{u}\| \geqslant 0$. □

Exemple Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors la norme de $\overrightarrow{AB}$ est égale à $\sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$.

Corollaire | Distance entre deux points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On peut donc utiliser le théorème précédent pour obtenir $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. □

Exemple Soient $A(10;2)$ et $B(-2;4)$.

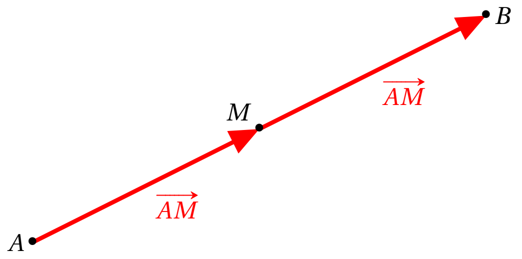
$$AB = \sqrt{((-2)-10)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 2^2} = \sqrt{148}$$

Propriété | Milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Alors le milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration. Notons M le milieu de $[A, B]$. Partant de A, l'image de la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est M. Rappelons que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix}$.



Enfin, les coordonnées de M sont donc $\left(x_A + \dfrac{x_B - x_A}{2}; y_A + \dfrac{y_B - y_A}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$. □