2

ENSEMBLES DE NOMBRES

La théorie des ensembles, fondée par Georg Cantor au 19e siècle, étudie les propriétés des ensembles, regroupements d'objets mathématiques. Elle a transformé les bases des mathématiques, explorant notions d'appartenance, d'union et d'intersection, influençant divers domaines des mathématiques et de la logique.

1 Quelques ensembles de nombres

1.1 Nombres entiers naturels

Définition | Entier naturel

On appelle **nombre entier naturel** un nombre entier positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté

$$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Exemples 4 et 287 sont des entiers naturels alors que -1 et 0,5 ne sont pas des entiers naturels.

Définition | Entier naturel non nul

On définit et on note $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des **nombres entiers naturels non nuls**.
Il s'agit donc de l'ensemble des nombres naturels **strictement** positifs et

$$\mathbf{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Remarque Pour noter que a est un entier naturel, on écrira $a \in \mathbf{N}$ et s'il est non nul, $a \in \mathbf{N}^*$.

1.2 Nombres entiers relatifs

Définition | Entier relatif

On appelle **nombre entier relatif** un nombre entier positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté

$$\mathbf{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

Exemples 4, 287, 0 et -1 sont des entiers relatifs alors que 0,5 n'en est pas un.

Remarques
- Pour noter que a est un entier relatif, on écrira $a \in \mathbf{Z}$.
- Les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.

1.3 Nombres rationnels

Définition | Rationnel

On appelle **nombre rationnel** un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbf{Q}$.

Exemples $\frac{1}{3}$, $\frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{2,5}{0,7} = \frac{25}{7}$ sont rationnels.

Remarque Les nombres entiers relatifs sont des nombres rationnels.

1.4 Nombres décimaux

Définition | Décimal

Un **nombre décimal** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbf{D}$.

Exemples
- 0,5 est un nombre décimal car $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.
- $-\frac{3}{25}$ est décimal car $-\frac{3}{25} = \frac{-12}{100} = \frac{-12}{10^2}$.

Remarque Les nombres entiers relatifs sont des décimaux. En effet, si $a \in \mathbf{Z}$, alors $a = \frac{a}{10^0}$ qui est bien de la forme demandée.

Théorème | Q ≠ D

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Dans ce cas, $\frac{1}{3}$ s'écrirait sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.
Ainsi, on aurait $3a = 10^n$, c'est à dire que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde car 3 ne divise aucune puissance de 10. En effet, il existe un critère de divisibilité par 3 qui dit qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Finalement, notre hypothèse était fausse et nous venons de prouver que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. □

Propriété | Développement décimal

Un nombre décimal admet un développement décimal avec un nombre fini de chiffres.

Exemples
- $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- $-\frac{3}{25} = -0{,}12$
- $\frac{217}{125} = 1{,}736$

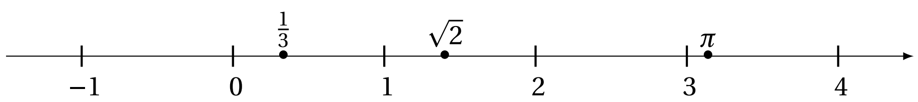
1.5 Nombres réels

Définition | Réel

Un nombre est dit **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée (ou numérique).
L'ensemble des nombres réels est noté **R**.

Remarque On peut aussi définir **R** comme l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec une partie entière et un nombre de décimal fini ou infini.

Exemples $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels.



2 Ensembles et inclusions

2.1 Notations ensemblistes

Nous avons déjà utilisé plusieurs notations depuis le début, nous allons tout préciser. Soient E et F deux ensembles de nombres. Voici une correspondance de notations :

x appartient à E : $x \in E$

x n'appartient pas à E : $x \notin E$

Ensemble E privé de 0 : E^*

E est inclus dans F : $E \subset F$

L'ensemble F est composé uniquement des éléments $a_1, \dots, a_n$: $F = \{a_1, \dots, a_n\}$

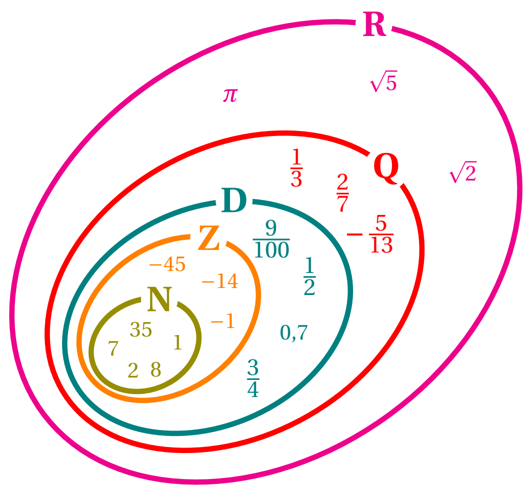
2.2 Classification des nombres

Théorème | Classification

On a la *chaîne d'inclusion* suivante :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Remarque On peut résumer le résultat précédent à l'aide du diagramme suivant :



Exercice

Compléter le tableau suivant avec $\in$ ou $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-2					
$\frac{2}{3}$					
$\sqrt{2}$					
$\frac{1}{4}$					
π					

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

3.1 Définition

Définition | Intervalle

Soient a et b deux réels ($a \leqslant b$).
L'ensemble de tous les réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé un **intervalle**, que l'on note $[a;b]$.

Exemples $3 \in [1;5]$, $6 \notin [1;5]$ et $5 \in [1;5]$.

Remarque On peut définir d'autres intervalles en fonction des inégalités choisies :

$a < x \leqslant b$ **définit l'intervalle :** $]a;b]$

$a \leqslant x < b$ **définit l'intervalle :** $[a;b[$

$a < x < b$ **définit l'intervalle :** $]a;b[$

Exemples Donnons la représentation graphique de plusieurs intervalles.

- $[1;3]$

- $]-1;4[$

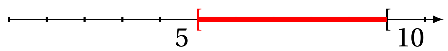
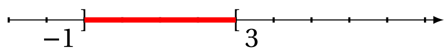
- $]0;+\infty[$

Remarque On notera très souvent :

- $[0;+\infty[=\mathbb{R}_+$
- $]0;+\infty[=\mathbb{R}_+^*$
- $]-\infty;0]=\mathbb{R}_-$
- $]-\infty;0[=\mathbb{R}_-^*$

Exercice

Compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$x < \pi$	$]-\infty;\pi[$	
$5 \leqslant x < 10$		
		
$\sqrt{2} \geqslant x$		
	$]-\infty;+\infty[$	

Exercice

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

- $-1 \quad [-4;1]$
- $\dfrac{1}{3} \quad [-4;1]$
- $-4,1 \quad [-4;1]$
- $\sqrt{3} \quad [-4;1]$

3.2 Union et intersection d'intervalles

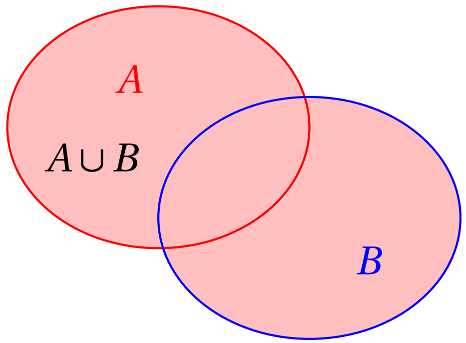
Définition | Union

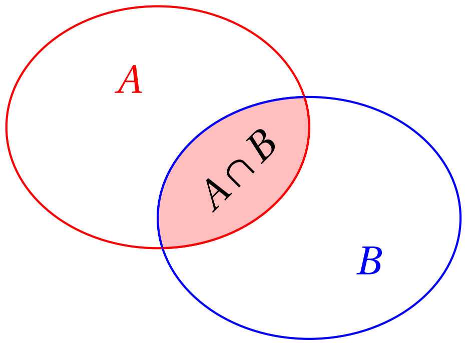
Soient A et B deux ensembles. On appelle **union** de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B.

Définition | Intersection

Soient A et B deux ensembles. On appelle **intersection** de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

Remarque On visualise ces différents ensembles sur le diagramme suivant :





Exercice

Donner l'union et l'intersection des intervalles I et J. Faire un diagramme pour chaque cas.

- $I =]1;4[$ et $J = [3;5[$
- $I =]-1;0]$ et $J = [0;1]$
- $I = [1;+\infty[$ et $J =]-\infty;2]$
- $I = [-1;0]$ et $J = [1;2]$