13

Droites, alignement et parallélisme

Résumé

Les droites sont des objets géométriques essentiels. Nous nous intéressons ici à l'alignement et au parallélisme grâce à l'étude de vecteurs dits colinéaires.

1 Colinéarité et alignement

1.1 Colinéarité

Définition | Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Les deux vecteurs ont donc la **même direction**.

Remarque $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. On a alors $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple $\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors que $\begin{pmatrix}-15\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Théorème | Critère de colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$.

Démonstration. C'est direct si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul. Dans la suite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront non nuls.
Supposons d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = kx'$ et $y = ky'$ et donc $xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$.
Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$. $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
Traitons le premier cas, le second se fera de la même manière. $xy' - yx' = 0$ implique que $y' = \frac{yx'}{x}$ donc $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ \frac{yx'}{x}\end{pmatrix} = \frac{x'}{x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. □

Exercice

Déterminer quels couples de vecteurs sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\ -3\sqrt{2}\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{84}{5}\\ -\frac{36}{5}\end{pmatrix}$

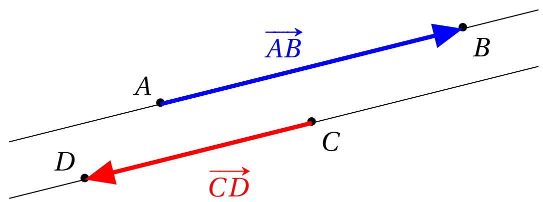
1.2 Alignement

Théorème | Droites parallèles

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation de l'égalité de vecteurs avec un parallélogramme. □

Exemple Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

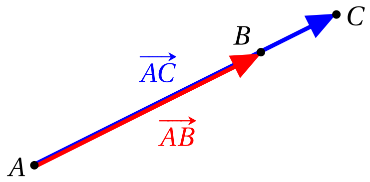


Théorème | Points alignés

Trois points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. A, B et C sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles. On peut utiliser le résultat précédent pour terminer la démonstration de ce théorème. □

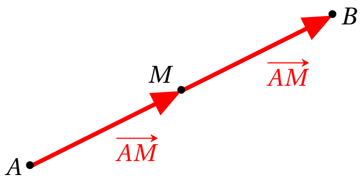
Exemple A, B et C sont alignés.



Propriété | Milieu d'un segment

Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors le milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration. Notons M le milieu de $[A, B]$. Partant de A, l'image de la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est M. Rappelons que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix}$.

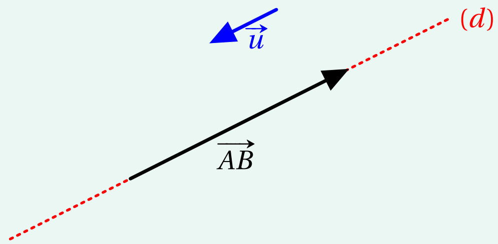


Enfin, les coordonnées de M sont donc $\left(x_A + \dfrac{x_B - x_A}{2} ; y_A + \dfrac{y_B - y_A}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B + x_A}{2} ; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$. □

2 Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit (d) une droite passant par deux points distincts A et B. On appelle **vecteur directeur** de la droite (d) tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Exemples

- ► Dans un repère, l'axe des abscisses admet pour vecteurs directeurs des vecteurs à coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ...
- ► Soit (d) passant par $A(5;2)$ et $B(-1;3)$. $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (d) dont on peut déterminer les coordonnées : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-5 \\ 3-2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  On peut donc donner d'autres vecteurs directeurs de (d), colinéaires à $\overrightarrow{AB}$, comme $\vec{u}\begin{pmatrix} -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Propriété

Une droite (d) peut être définie à partir d'un **vecteur directeur** $\vec{u}$ et d'un **point** A par lequel elle passe. Ainsi, $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

3 Équation cartésienne d'une droite

Propriété

Soit (d) une droite. Dans un repère du plan, il existe a, b et c des nombres réels (avec $(a;b) \neq (0;0)$) tels que si M est un point de coordonnées $(x;y)$:

$$M \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de (d).

Démonstration. Nous allons nous ramener à la propriété précédente qui donne aussi une caractérisation d'appartenance à (d). On sait que (d) est définie par un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ et $A(\alpha;\beta)$ un point du plan. Ainsi, si $M(x;y)$, alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}$.
On utilise la propriété précédente et le critère de colinéarité par déterminant :

$$\begin{aligned} M \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-\alpha)\delta - (y-\beta)\gamma = 0\\ &\Leftrightarrow \delta x - \gamma y + (\beta\gamma - \alpha\delta) = 0 \end{aligned}$$

Notre propriété est bien démontrée en prenant $a = \delta$, $b = -\gamma$ et $c = \beta\gamma - \alpha\delta$.
Notons bien que a et b ne sont jamais nuls simultanément car $\vec{u} \neq \vec{0}$. □

Remarque Il existe une **infinité d'équations cartésiennes** pour une même droite. Elles sont toutes équivalentes en appliquant un même coefficient de proportionnalité (non nul) aux trois paramètres a, b et c.

Exemple Soit (d) la droite passant par $A(3;2)$ et $B(0;-3)$. Déterminons une équation cartésienne de (d).
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ -5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). Soit $M(x;y)$ un point du plan. Ainsi, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\ y-2\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M \in (d) &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0\\ &\Leftrightarrow -5(x-3) - (-3)(y-2) = 0\\ &\Leftrightarrow -5x + 15 + 3y - 6 = 0\\ &\Leftrightarrow -5x + 3y + 9 = 0 \end{aligned}$$

Théorème | Droites parallèles

Soient (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

$$d \,//\, d' \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$$

Démonstration. Supposons que $b \neq 0$ et $b' \neq 0$ (si l'un des deux est nul, c'est trivial).

Soient $M_1\left(-1; \frac{a-c}{b}\right)$, $M_2\left(1; \frac{-a-c}{b}\right)$, $M_1'\left(-1; \frac{a'-c'}{b'}\right)$ et $M_2'\left(1; \frac{-a'-c'}{b'}\right)$.

On peut affirmer que M_1 et M_2 appartiennent à (d) mais aussi que M_1' et M_2' appartiennent à (d'). Pour M_1 par exemple, on vérifie que ses coordonnées sont compatibles avec l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. C'est le cas : $a \times (-1) + b\frac{a-c}{b} + c = -a + a - c + c = 0$.
On donne ainsi des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de (d) et (d').

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix}2\\ -\frac{2a}{b}\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{M_1'M_2'} = \begin{pmatrix}2\\ -\frac{2a'}{b'}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $(d) \,//\, (d') \Leftrightarrow 2 \times \left(-\frac{2a'}{b'}\right) - 2 \times \left(-\frac{2a}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow -4\frac{a'}{b'} + 4\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow -a'b + ab' = 0$ (nous avons multiplié par $\frac{bb'}{4} \neq 0$). □

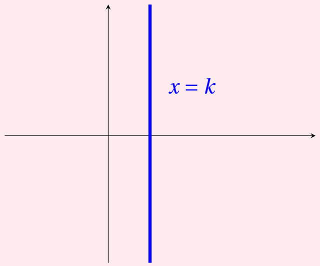
Exemple Soient (d) et (d') d'équations cartésiennes respectives $21x - 3y + 24 = 0$ et $-7x + y + 2 = 0$.
(d) et (d') sont parallèles car $21 \times 1 - (-3) \times (-7) = 0$.

4 Équation réduite d'une droite

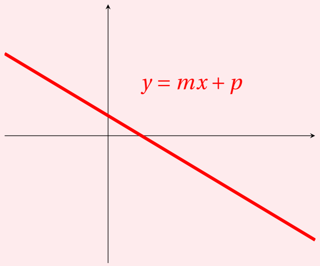
Propriété

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ ($(a;b)\neq(0;0)$).

- Si $b=0$, alors $ax+by+c=0$ est équivalente à une **unique** équation de la forme $x=k$ appelée **équation réduite de** (d), où $k\in\mathbf{R}$.



- Si $b\neq 0$, alors $ax+by+c=0$ est équivalente à une **unique** équation de la forme $y=mx+p$ appelée **équation réduite de** (d), où $m\in\mathbf{R}$ est le **coefficient directeur de** (d) et $p\in\mathbf{R}$ l'**ordonnée à l'origine de** (d).



Démonstration. ▶ Si $b=0$, alors $a\neq 0$ et pour tout point $M(x;y)$ de (d), on a :

$$ax+by+c=0 \Leftrightarrow ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{a}$$

C'est-à-dire, $k=\frac{c}{a}$.

▶ Si $b\neq 0$, pour $M(x;y)$ de (d) :

$$ax+by+c=0 \Leftrightarrow y=\frac{-ax-c}{b} \Leftrightarrow y=\frac{-a}{b}x+\frac{-c}{b}$$

C'est-à-dire, $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$. □

Exemples ▶ Soit (d) d'équation cartésienne $6x+20=0$.

Nous sommes dans le premier cas, on isole x et donc l'équation réduite de (d) est $x=-\frac{20}{6}$ ou plutôt $x=-\frac{10}{3}$.

▶ Soit (d) d'équation cartésienne $\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y=0$. C'est le second cas, on isole y et ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x-\frac{5}{7}y=0 &\Leftrightarrow \frac{5}{7}y=\frac{2}{3}x\\ &\Leftrightarrow y=\frac{7}{5}\times\frac{2}{3}x\\ &\Leftrightarrow y=\frac{14}{15}x.\end{aligned}$$

Remarque Si l'équation réduite d'une droite est sous la deuxième forme $y=mx+p$, cette droite est la **représentation graphique d'une fonction affine** : c'est ainsi cohérent d'utiliser le même vocabulaire. Le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine peuvent donc aussi être déterminés graphiquement mais il est aussi souvent plus simple de tracer la droite qu'à partir de l'équation cartésienne.

Théorème | Droites parallèles

Soient (d) et (d') d'équations réduites respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$.

$$d\ //\ d' \Leftrightarrow m=m'$$

Démonstration. On se ramène au résultat sur les équations cartésiennes. (d) et (d') ont pour équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ avec $b\neq 0$ et $b'\neq 0$.

On sait que $(d)\ //\ (d') \Leftrightarrow ab'-ba'=0$ et nous avons déjà vu que $m=-\frac{a}{b}$ et $m'=-\frac{a'}{b'}$. Donc, comme $bb'\neq 0$:

$$(d)\ //\ (d') \Leftrightarrow ab'-ba'=0 \Leftrightarrow \frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=0 \Leftrightarrow -m+m'=0 \Leftrightarrow m=m'.$$

□

Exemple Soient f, g et h trois fonctions affines définies sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = 3x+1$, $g(x) = 2x+1$ et $h(x) = 3x-10$. Les représentations graphiques de f et h sont parallèles (même coefficient directeur) mais pas celles de f et g ou celles de g et h.