

DEVOIR SURVEILLÉ 5 A

Calculatrice autorisée

Lundi 14 avril 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

Simplifier les expressions suivantes en les réduisant sous la forme a^n avec a le plus petit possible.

Justifications attendues.

1. $(-7)^2 \times (-7)^3$

2. $\frac{2^4}{2^2}$

3. $(4^5)^2$

4. $\frac{2 \times 2^7}{4 \times 4}$

5. $\frac{3^7 \times 9}{3^6 \times 3^3}$

CORRECTION

On simplifie.

1. $(-7)^2 \times (-7)^3 = (-7)^{2+3} = (-7)^5$

2. $\frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2$

3. $(4^5)^2 = 4^{5 \times 2} = 4^{10} = (2^2)^1 0 = 2^{20}$

4. $\frac{2 \times 2^7}{4 \times 4} = \frac{2^{1+7}}{2^2 \times 2^2} = \frac{2^8}{2^{2+2}} = \frac{2^8}{2^4} = 2^{8-4} = 2^4$

5. $\frac{3^7 \times 9}{3^6 \times 3^3} = \frac{3^7 \times 3^2}{3^6 \times 3^3} = \frac{3^{7+2}}{3^{6+3}} = \frac{3^9}{3^9} = 3^{9-9} = 3^0$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

1. Donner la définition d'une suite géométrique.
2. Donner la forme explicite d'une suite géométrique (u_n) de raison q .
3. Soit (u_n) géométrique telle que $u_3 = 1,7$ et $u_5 = 15,3$. Déterminer la raison q .

CORRECTION

1. Voir cours.
2. La forme explicite d'une suite géométrique (u_n) de raison q est :

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

3. On sait que $u_3 = 1,7$ et $u_5 = 15,3$.

Comme la suite est géométrique :

$$u_5 = u_3 \cdot q^2 \text{ donc } 15,3 = 1,7 \cdot q^2 \text{ donc } q^2 = \frac{15,3}{1,7} = 9. \text{ Ainsi, } q = \sqrt{9} \text{ ou } -\sqrt{9} = 3 \text{ ou } -3$$

EXERCICE 3 (9 POINTS)

Un influenceur vérifie régulièrement son nombre d'abonnés sur les réseaux sociaux. Il estime que sur Instagram son nombre d'abonnés augmente en moyenne de 7% par mois. Il débute l'année 2025 avec 10 000 abonnés. Pour tout n , on note a_n le nombre estimé d'abonnés de cet influenceur au n -ième mois.

1. Donner a_0 , puis calculer a_1 et a_2 .
2. Exprimer, pour tout n , a_{n+1} en fonction de a_n .
3. En déduire la nature de la suite (a_n) . Préciser sa raison.
4. Donner, pour tout n , une expression de a_n en fonction de n .
5. Cet influenceur s'est fixé comme objectif d'atteindre les 25 000 abonnés d'ici la fin de l'année 2025. Devrait-il atteindre son objectif?
6. Un autre influenceur commence avec 100 000 abonnés en 2025 et souhaite savoir au bout de combien de temps il atteindra le million d'abonnés. Sa croissance mensuelle est estimée à 20%.
Combien de temps doit-il attendre?

CORRECTION

1. $a_0 = 10\,000$

$$a_1 = a_0 \times 1,07 = 10\,000 \times 1,07 = 10\,700$$

$$a_2 = a_1 \times 1,07 = 10\,700 \times 1,07 = 11\,449$$

2. $a_{n+1} = a_n \times 1,07$

3. La suite est **géométrique** de raison $q = 1,07$

4. Formule explicite :

$$a_n = a_0 \cdot q^n = 10\,000 \cdot 1,07^n$$

5. On souhaite avoir $a_{12} \geq 25\,000$.

$$\text{Or, on a : } a_{12} = 10\,000 \times (1,07)^{12} \approx 22\,522.$$

L'objectif n'est pas atteignable en 2025.

6. On souhaite avoir $b_n \geq 1\,000\,000$ où (b_n) est le nombre d'abonnées de cet autre influenceur.

(b_n) est géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $b_0 = 100\,000$ et donc pour tout n :

$$b_n = b_0 \times q^n = 100\,000 \times 1,2^n.$$

Par calcul ou avec la calculatrice, on a :

- $b_{12} \approx 891\,610$
- $b_{13} \approx 1\,069\,932$.

Il faut donc attendre 13 mois pour voir un million d'abonnés.