DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice autorisée

Lundi 7 octobre

EXERCICE 1 (4 POINTS)

Résoudre les équations suivantes.

1. $10x - 12 = 3x + 4$

2. $(21x - 3)(4 - 18x) = 0$

CORRECTION

1.

$$\begin{aligned} 10x - 12 &= 3x + 4 \\ 7x &= 16 \\ x &= \frac{16}{7} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (21x - 3)(4 - 18x) &= 0 \\ 21x = 3 \text{ ou } &-18x = -4 \\ x = \frac{3}{21} \text{ ou } x &= \frac{-4}{-18} \\ x = \frac{1}{7} \text{ ou } x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

1. Donner la définition d'une suite arithmétique.

2. Donner un exemple d'une suite qui n'est pas arithmétique.

3. On considère (u_n) une suite arithmétique de raison 4,25 et de premier terme $u_0 = -1{,}75$. Calculer u_{10} et u_{100}.

CORRECTION

1. Une suite (u_n) est dite arithmétique si elle vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ avec r un nombre réel.

2. $1; 2; 4; 8; 16; \cdots$ sont les premiers termes d'une suite qui n'est pas arithmétique puisque $u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = 2$.

3. La forme explicite de (u_n) est, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$u_n = u_0 + r \times n = -1{,}75 + 4{,}25n.$$

Ainsi,

- $u_{10} = -1{,}75 + 4{,}25 \times 10 = 40{,}75$
- $u_{100} = -1{,}75 + 4{,}25 \times 100 = 423{,}25$.

EXERCICE 3 (5 POINTS)
La réserve de noisettes d'une famille d'écureuils diminue chaque jour de l'hiver. Elle débute à 1 560 noisettes, puis atteint 1 492 noisettes au bout d'un mois, 1 424 au bout de deux mois, et ainsi de suite... On note u_n le nombre de noisettes à la fin du n^e mois, u_0 étant égal à 1 560.

1. Donner la nature de la suite (u_n) en précisant ses paramètres.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer et interpréter u_3 puis u_{12}.
4. Combien de jours pourront tenir les écureuils avant d'être à court de noisettes ?

   La réserve était-elle suffisante ?

CORRECTION
1. Chaque mois, la réserve diminue de 68 noisettes. Ainsi, (u_n) vérifie la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = u_n - 68.$$
   (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1560$ et de raison $r = -68$.
2. La forme explicite de (u_n) est, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_n = u_0 + r \times n = 1560 - 68n.$$
3. $u_3 = 1\,560 - 68 \times 3 = 1\,356$

   $u_{12} = 1\,560 - 68 \times 12 = 744.$
4. Cherchons n tel que $u_n = 0$.
$$\begin{aligned} & u_n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1\,560 - 68n = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1\,560 = 68n \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1560}{68} = n \end{aligned}$$
   Ainsi, $n \simeq 23$.

   Les écureuils pourront tenir environ 23 mois, soit presque 2 ans, avec leurs noisettes, ce qui est largement suffisant pour l'hiver.

EXERCICE 4 (5 POINTS)
Un escargot part à l'aventure et parcourt chaque jour 2,5 m. On note v_n la distance totale qu'il a parcourue, en m, à la fin du jour n, où n est un entier naturel.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Quelle est la nature de (v_n) ? Préciser ses paramètres.
3. Calculer la distance totale parcourue les quatre premiers jours.
4. Combien de jours lui faut-il pour parcourir une distance de 915 m ?

CORRECTION
1. $v_{n+1} = v_n + 2{,}5$ puisque l'escargot ajoute 2m50 à sa distance totale chaque jour.
2. On reconnait la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison 2,5 et premier terme 0.
3. Pendant quatre jours, l'escargot a parcouru une distance totale égale à $v_4 = 2{,}5 \times 4 = 10$ m.

4. Cherchons n tel que $v_n = 915$.

$$\begin{aligned} u_n &= 915 \\ \Leftrightarrow 2{,}5n &= 915 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{915}{2{,}5} \\ \Leftrightarrow n &= 366 \end{aligned}$$

Ainsi, il lui faudra 366 jours pour parcourir 915 m.