DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Lundi 5 mai 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

Simplifier les expressions suivantes en les réduisant sous la forme a^n avec a le plus petit possible.
Justifications attendues.

1. $(-11)^2 \times (-11)^7$ **2.** $\dfrac{3^4}{3^{-5}}$ **3.** $\left(25^2\right)^2$ **4.** $\dfrac{2\times 2^3}{4\times 4^2}$ **5.** $\dfrac{3^7\times 9}{3^6\times 3^3}$

CORRECTION

1. $(-11)^2 \times (-11)^7 = (-11)^{2+7} = (-11)^9$

2. $\dfrac{3^4}{3^{-5}} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

3. $\left(25^2\right)^2 = 25^{2\times 2} = 25^4 = (5^2)^4 = 5^8$

4. $\dfrac{2\times 2^3}{4\times 4^2} = \dfrac{2^1\times 2^3}{(2^2)^1\times (2^2)^2} = \dfrac{2^4}{2^2\times 2^4} = \dfrac{2^4}{2^6} = 2^{-2}$

5. $\dfrac{3^7\times 9}{3^6\times 3^3} = \dfrac{3^7\times 3^2}{3^6\times 3^3} = \dfrac{3^{7+2}}{3^{6+3}} = \dfrac{3^9}{3^9} = 3^0 = 1$

EXERCICE 2 (6 POINTS)

1. Donner la définition d'une suite géométrique.

2. Donner la forme explicite d'une suite géométrique (u_n) de raison q.

3. Soit (u_n) géométrique telle que $u_4 = 3{,}6$ et $u_6 = 90$. Déterminer la raison q.

CORRECTION

1. Voir cours.

2. La forme explicite dune suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q est :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

3. On a $u_4 = 3{,}6$ et $u_6 = 90$. Comme (u_n) est géométrique, on a :

$$u_6 = u_4 \times q^{6-4} = u_4 \times q^2$$

$$90 = 3{,}6\times q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{90}{3{,}6} = 25 \Rightarrow q = \sqrt{25} = 5 \text{ ou } q = -\sqrt{25} = -5$$

Donc la raison est $q = 5ou-5$.

EXERCICE 3 (9 POINTS)
Une réserve naturelle suit l'évolution d'une population de hérissons réintroduite dans un habitat protégé. Début 2025, 10 000 individus sont recensés. On estime que cette population croît de 12% par mois, grâce à des conditions environnementales favorables.
Pour tout n, on note i_n le nombre estimé d'individus au n-ième mois.

1. Donner i_0, puis calculer i_1 et i_2.

2. Exprimer, pour tout n, i_{n+1} en fonction de i_n.

3. En déduire la nature de la suite (i_n). Préciser sa raison.

4. Donner, pour tout n, une expression de i_n en fonction de n.

5. La réserve naturelle s'est fixé comme objectif d'atteindre une population de 30 000 hérissons d'ici la fin de l'année 2025. Cet objectif est-il réalisable ?

6. Dans une autre région, une seconde réserve débute l'année 2025 avec une population de 100 000 hérissons. Grâce à un programme de réintroduction intensif, on estime que cette population croît de 17% par mois.

En combien de temps cette population atteindra-t-elle le million d'individus ?

CORRECTION

1.
- $i_0 = 10\,000$
- $i_1 = i_0 \times 1{,}12 = 10\,000 \times 1{,}12 = 11\,200$
- $i_2 = i_1 \times 1{,}12 = 11\,200 \times 1{,}12 = 12\,544$

2. On a : $i_{n+1} = i_n \times 1{,}12$

3. La suite (i_n) est une suite **géométrique** de raison $q = 1{,}12$

4. Forme explicite :

$$i_n = i_0 \times q^n = 10\,000 \times (1{,}12)^n$$

5. On souhaite avoir $i_{12} \geqslant 30\,000$.
Or, on a : $i_{12} = 10000 \times (1{,}12)^{12} \approx 38860$.
L'objectif est atteignable avant fin décembre 2025.

6. On souhaite avoir $j_n \geqslant 100\,000$ où (j_n) est le nombre de hérissons dans cette autre réserve.
(j_n) est géométrique de raison $q = 1{,}17$ et de premier terme $j_0 = 100000$ et donc pour tout n :

$$j_n = j_0 \times q^n = 100000 \times 1{,}17^n.$$

Par calcul ou avec la calculatrice, on a :

- $j_{12} \approx 981610$
- $j_{13} \approx 1069932$.

Il faut donc attendre 13 mois pour voir un million de hérissons.