5

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Résumé

Seconde croissance étudiée cette année : la croissance exponentielle dont le vocabulaire est régulièrement utilisé dans le langage commun.

1 Suites géométriques

Définition

Soient $q \neq 0$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

(u_n) est appelée **suite géométrique** de **raison** q.

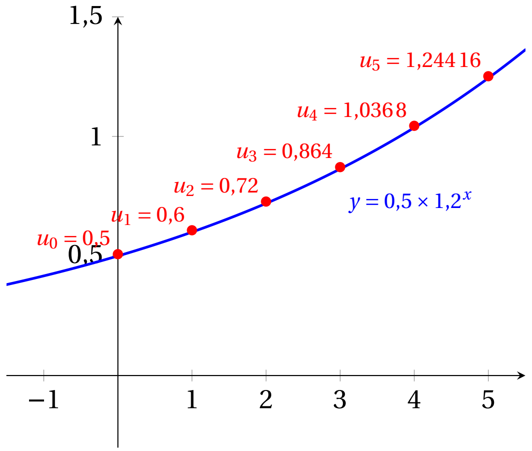
Exemple Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier $u_0 = 1{,}3$. Alors, $u_1 = 2 \times u_0 = 3 \times 1{,}3 = 2{,}6$. De même, $u_2 = 2 \times u_1 = 5{,}2$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 10{,}4$, $u_4 = 20{,}8$, $u_5 = 41{,}6$, …

Propriété

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple Représentons la suite géométrique (u_n) de raison 1,2 et de premier terme 0,5.



Théorème | Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 **strictement positif**.

- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $q > 1$.
- (u_n) est constante si, et seulement si, $q = 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $0 < q < 1$.

Exemples

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 3^n$. C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1 donc elle est strictement croissante.
- Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{10} v_n \end{cases}$. (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{10}$ et de premier terme 2. Elle est donc strictement décroissante.

2 Fonctions exponentielles de base a

Définition | Exponentielle de base a

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $a > 0$ et de premier terme 1.
On peut prolonger (u_n) en une fonction f : la **fonction exponentielle de base** a.
Cette fonction est définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = a^x.$$

On prend la convention $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ si $x \leqslant 0$.

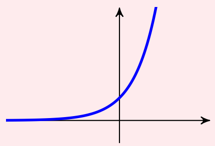
Exemples

- $f(x) = 2^x$ est l'expression d'une fonction exponentielle de base 2.
- $f(x) = 0{,}3^x$ est l'expression d'une fonction exponentielle de base 0,3.

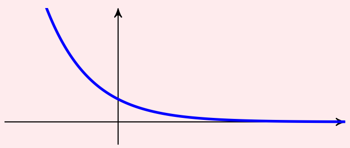
Propriétés | Variations d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction exponentielle de base $a > 0$.

- Si $a > 1$, alors f est strictement **croissante** sur $\mathbf{R}$.



- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement **décroissante** sur $\mathbf{R}$.



Exemples

- Soit f d'expression $f(x) = 2^x$. f est strictement croissante car sa base est strictement supérieur à 1.
- Soit f d'expression $f(x) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^x$. f est strictement décroissante car sa base est strictement comprise entre 0 et 1.
- Soit f d'expression $f(x) = -3 \times 5^x$. f est strictement décroissante car $x \mapsto 5^x$ est strictement croissante.

Exercice

Donner les variations des fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$.

1. $f : x \mapsto 5 \times 9^x$
2. $g : x \mapsto -2 \times 0{,}6^x$
3. $h : x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Propriétés

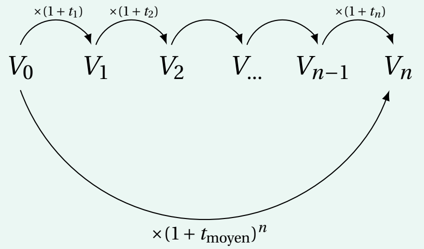
Les propriétés connues du calcul exponentiel sont toujours vraies.
Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ et $x, y \in \mathbf{R}$:

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

3 Application au taux moyen

Définition

Lors de n évolutions successives à des taux $t_1, t_2, \ldots, t_n$ entre une valeur initiale V_0 et une valeur finale V_n, on appelle **taux d'évolution moyen** le taux noté t_{moyen}, qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n.



$$(1+t_{\text{moyen}})^n = (1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$$

Propriété

Calculer un taux d'évolution moyen revient à trouver t_{moyen} tel que son coefficient multiplicateur associé est solution de : $x^n = CM$ où $CM > 0$ est le **coefficient multiplicateur** global.

$$t_{\text{moyen}} = CM^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemple D'après l'association *60 Millions de consommateurs*, le prix des pâtes a augmenté d'environ 11,4% entre février 2021 et février 2022. Ainsi, l'évolution a suivi un coefficient multiplicateur C_M de $1+0{,}114 = 1{,}114$.

Finalement, le coefficient multiplicateur moyen est $C_M^{\frac{1}{12}}$ et le taux moyen est :

$$t_{\text{moyen}} = (1+0{,}114)^{\frac{1}{12}} - 1.$$