4

Phénomènes aléatoires

Résumé

Dans ce chapitre, nous lions d'abord nos tableaux croisés d'effectifs au probabilités tout en revenant sur les notions vues en seconde (arbres, calculs simples de probabilités). Enfin, nous irons plus loin via les probabilités conditionnelles et l'indépendance.

1 Fréquences

Définitions

Pour une **série statistique à deux variables**, les effectifs des différentes valeurs des deux caractères étudiés sont généralement présentés dans un tableau croisé d'effectifs. Les totaux des lignes et des colonnes d'un tableau à double entrée sont appelées les **marges** du tableau.

La **fréquence marginale** d'une valeur A est le quotient :

$$f(A) = \frac{\text{effectif total de } A}{\text{effectif total}}.$$

Exemple Considérons la série statistique à deux variables (robe et âge) de chiens accueillis par un chenil.

	Moins d'un an	Entre 1 et 3 ans	4 ans et plus	Total
Robe sombre	4	10	23	37
Robe claire	12	5	18	35
Total	16	15	41	72

Ici, la fréquence marginale des chiens à la robe claire est égale à $\frac{35}{72} \approx 0{,}486$ tandis que la fréquence marginale des chiens de moins d'un an est égale à $\frac{16}{72} \approx 0{,}222$.

Définition

Si on s'intéresse à la fréquence d'apparition d'une valeur A d'un caractère parmi une sous-population qui partage la valeur B d'un caractère (potentiellement le même), on dit que l'on détermine la **fréquence conditionnelle de A parmi B**.

On la note $f_B(A)$ et elle est égale à $\frac{\text{effectif vérifiant à la fois } A \text{ et } B}{\text{effectif total de } B}$.

Exemple Dans l'exemple précédent, la fréquence conditionnelles des chiens à la robe claire parmi les plus de 4 ans vaut $\frac{18}{41}$.

	Moins d'un an	Entre 1 et 3 ans	4 ans et plus	Total
Robe sombre	4	10	23	37
Robe claire	12	5	18	35
Total	16	15	41	72

2 Arbre pondéré

Définition

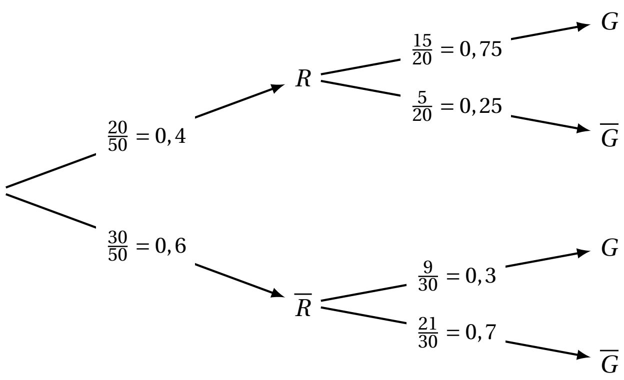
Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.
À chaque **nœud**, on trouve toujours un événement.

Théorème | Lecture d'un arbre

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de tous les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exemple - Tirage dans un urne Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions *Gagné* ou *Perdu*. 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.

On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement « La boule tirée est rouge » et G : « La boule tirée est gagnante ».
On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :



La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = \mathbb{P}(R \cap G)$.
Sur l'arbre, on retrouve bien $0,4 \times 0,75 = 0,3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0,48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité $0,3$ et le chemin $\overline{R} \cap G$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$.
On retrouve aussi :

$$\mathbb{P}(R \cap G) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48 = \mathbb{P}(G).$$

3 Probabilités conditionnelles et indépendance

Dans toute la suite, on considère A et B, deux événements de probabilités **non nulles** d'un même univers.

Définition

La **probabilité conditionnelle** que l'évènement A se réalise sachant que B s'est déjà réalisé est égal à :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemple Revenons à nouveau dans le chenil de la première section et tirons au hasard (sous-entendu de manière équiprobable) un des chiens accueillis.
Si on note l'évènement S : « Choisir un chien à la robe sombre », alors $\mathbb{P}(S) = \dfrac{37}{72}$.

Enfin, si M : « Choisir un chien de moins d'un an », alors $M \cap S$: « Choisir un chien de moins d'un an à la robe sombre » de probabilité $\mathbb{P}(M \cap S) = \dfrac{4}{72}$.

Nous pouvons maintenant calculer $\mathbb{P}_S(M)$ la probabilité que le chien soit âgé de moins d'un an sachant qu'il a une robe sombre :

$$\mathbb{P}_S(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{4}{72}}{\frac{37}{72}} \approx 0{,}108.$$

Définition | Événements indépendants

On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Propriété

On a de façon équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

Remarque Pour montrer que A et B soient indépendants, il ne suffit de vérifier qu'une seule de ces trois conditions.

Exemple On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement « Obtenir un cœur » et D : « Obtenir une dame ». $C \cap D$ est alors « Obtenir la dame de cœur ».

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{32}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

  On a aussi $\mathbb{P}_C(D) = \mathbb{P}(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les cœurs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\frac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{34}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{34}$ et $\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D) = \frac{8 \times 4}{34 \times 34} \neq \mathbb{P}(C \cap D)$ donc C et D pas indépendants.

  De même, $\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{8}$ mais $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.