3

Fonctions affines

Résumé

Nous nous intéressons à nouveau au modèle d'évolution linéaire mais dans le cas continu, c'est-à-dire, les fonctions affines.

1 Définition

Définition | Fonctions affines

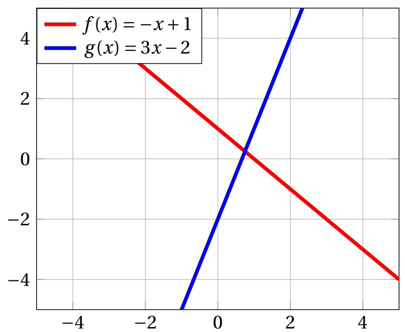
Les fonctions représentées par des droites sont appelées les **fonctions affines**.
Ce sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ dont l'expression est de la forme

$$f(x) = ax + b$$

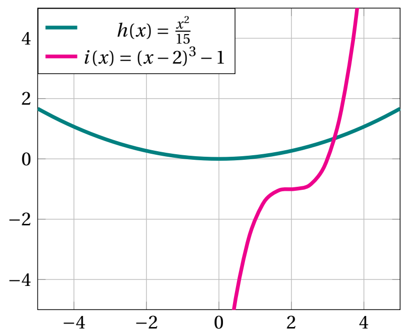
avec a et b deux nombres réels.

a est le **coefficient directeur** ou la **pente**.
b est l'**ordonnée à l'origine**.

Exemples



Fonctions affines



Fonctions non affines

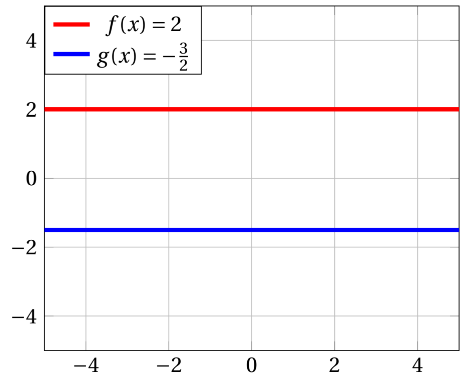
Exercice

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont affines et donner, dans ce cas, a et b.

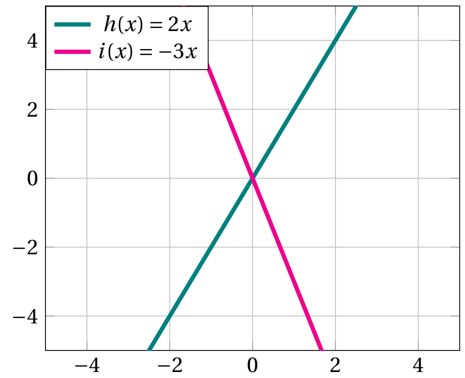
1. $g : x \mapsto -x+4$ **2.** $h : x \mapsto 3x^2 - 2$ **3.** $f : x \mapsto \dfrac{1-2x}{3}$

Remarques

- Si $a = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = b$. La fonction est **constante**.
- Si $b = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = ax$. La fonction est **linéaire**. Les fonctions linéaires sont les seules fonctions dont le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité.



Fonctions constantes



Fonctions linéaires

2 Propriétés

Propriétés

- Une fonction définie sur $\mathbf{R}$ est affine si, et seulement si, sa courbe représentative dans un repère est une droite. Dans ce cas, a est appelé le coefficient directeur de la droite et b son ordonnée à l'origine.
- $b = f(0)$
- Pour tout $x_A, x_B \in \mathbf{R}$ tels que $x_A \neq x_B$:

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

Exemple Soit f affine dont la courbe représentative passe par $(0;132)$ et $(3;465)$. On détermine facilement a et b :
$b = f(0) = 132$ et $a = \dfrac{465-132}{3-0} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{333}{3} = 111$.

Propriétés | Variations d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f : x \mapsto ax+b$.

- Si $a > 0$ alors f est croissante sur **R**.
- Si $a = 0$ alors f est constante sur **R**.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur **R**.

Exemples $f : x \mapsto 10x-2$ est croissante sur **R** mais $g : x \mapsto -x+1$ est décroissante sur **R**.

Attention

Pour bien lire le coefficient directeur a, il ne faut pas regarder le premier nombre de l'expression mais celui en facteur de x.
Ainsi, pour $f(x) = 3-5x$, $a = 5$ et pour $f(x) = -2+x$, $a = 1$.

Exemple On donne le **tableau de variations** de $f : x \mapsto -2x+3$ sur $[-5;5]$.

x	-5		5
$f(x)$	13	$\searrow$	-7

Théorème | Signe d'une fonction affine

Le signe de $f : x \mapsto ax+b$ ($a \neq 0$) dépend du signe de a et change en $-\dfrac{b}{a}$, unique solution de $ax+b=0$. Donnons les tableaux de signe associés :

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple Donnons le **tableau de signe** de $f : x \mapsto -2x+3$ sur **R**. Nous savons déjà qu'elle est décroissante sur **R** car $-2 < 0$ et nous avons vu son tableau de variations sur $[-5;5]$. Nous avons besoin de savoir quand est-ce que f s'annule. Il faut donc résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans **R**.

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow -2x+3 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

f ne s'annule qu'une seule fois sur **R**, en $\dfrac{3}{2}$, donc elle est de signe constant sur $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$ (celui de $f(-5) = 13$) et sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ (celui de $f(5) = -7$).

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$