# 1

# SUITES ARITHMÉTIQUES

**Résumé**

Nous étudions un objet mathématique au fonctionnement très intuitif : la suite numérique, c'est-à-dire une suite de nombres. Nous nous restreindrons d'abord au cas arithmétique, plus simple, pour donner des premières propriétés et étudier différentes représentations.

## 1 Généralités

**Définition**

Une **suite numérique** est une liste (infinie) de nombres, appelés **termes**, qui sont ordonnés et numérotés.
Le premier terme d'une suite $u$ se note $u_0$, le suivant $u_1$, ... et plus généralement, le terme de rang $n$ , appelé aussi **terme d'indice** $n$, se note $u_n$.
L'ensemble de tous ces termes, qui constitue la suite, est noté $u$, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou plus souvent $(u_n)$.

**Exemple** On peut définir une suite explicitement comme la suite $(u_n)$ définie par $u_n = 3n^4 - \dfrac{2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Dans ce cas, le premier terme $u_0$ est égal à $3\times 0^4 - \dfrac{2}{0+1}$, c'est-à-dire, $u_0 = -2$.
De même :

$$u_1 = 3\times 1^4 - \frac{2}{1+1} = 3 - \frac{2}{2} = 2. \tag{1}$$

## 2 Relation de récurrence

**Définition**

Une **suite arithmétique** est une suite telle qu'il existe un nombre $r$, appelé **raison** qui vérifie :

$$\text{pour tout } n\in\mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

**Remarque** On appelle cette relation une **relation de récurrence** et elle permet de déterminer tous les termes de la suite à partir d'un seul.

**Exemples**

- Les deux suites suivantes sont arithmétiques, respectivement de raison de 2,3 et $-1$ :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = u_n + 2{,}3 \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbf{N} \end{cases}$$

- Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison 3 et de premier $u_0 = -5$.

  Alors, $u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$. De même, $u_2 = u_1 + 3 = 1$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 4$, $u_4 = 7$, $u_5 = 10, \ldots$

**Attention**

Si on veut prouver qu'une suite numérique est arithmétique, il faut veiller à démontrer la relation de récurrence pour **tous** les indices de la suite ! Le calcul des premiers termes ne peut suffire.

## 3 Forme explicite et représentation graphique

**Propriété**

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$ si, et seulement si, pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$u_n = r\times n + u_0$$

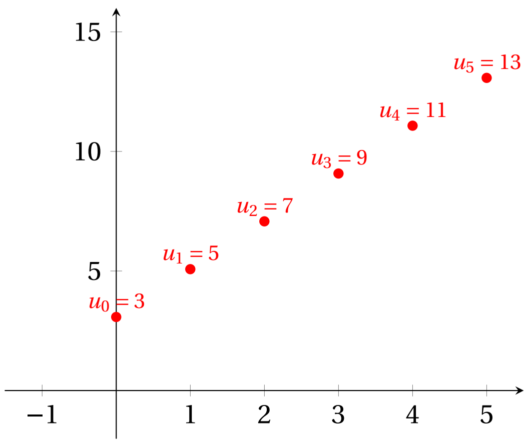
**Attention**

Cette écriture est, et doit être, valable pour **tous les termes** de la suite.

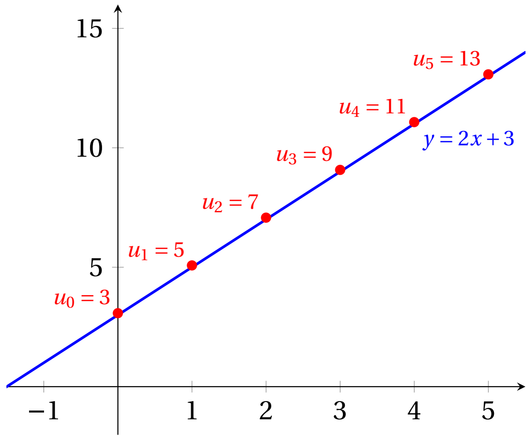
**Remarques** ▶ C'est une écriture explicite de cette suite arithmétique. Elle permet de déterminer très facilement tous les termes de la suite.

▶ On peut avoir envie de représenter graphiquement une suite numérique de la même manière que l'on trace les courbes représentatives de fonctions. Cette fois-ci, pas de courbe mais un nuage de points puisque nous indexons sur des entiers naturels. Le nuage de points est constitué de l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

**Exemple** Représentons la suite arithmétique $(u_n)$ de raison 2 et de premier terme 3.




La forme explicite de $(u_n)$ est : $u_n = 2n + 3$ si $n \in \mathbf{N}$. Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de $(u_n)$ et de la fonction affine $f$ d'expression $f(x) = 2x + 3$ si $x \in \mathbf{R}$ coïncident sur $\mathbf{N}$.




**Définitions**

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.

▶ $(u_n)$ est **strictement croissante** si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p < u_q$.

▶ $(u_n)$ est **constante** si $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

▶ $(u_n)$ est **strictement décroissante** si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p > u_q$.

**Théorème | Variations d'une suite arithmétique**

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$.

▶ $(u_n)$ est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.

▶ $(u_n)$ est constante si, et seulement si, $r = 0$.

▶ $(u_n)$ est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

*Démonstration.* Donnons le premier cas : les autres sont similaires.
$(u_n)$ est strictement croissante si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p < u_q$.
Prenons deux entiers naturels quelconques $p$ et $q$ tels que $p < q$. Ainsi, on a :

$$u_p = rp + u_0 \qquad \text{et} \qquad u_q = rq + u_0$$

d'où, en soustrayant les deux équations membre à membre, de manière équivalente :

$$u_p - u_q = r(p - q)$$

$p - q < 0$ et donc $r > 0 \Leftrightarrow u_p - u_q < 0 \Leftrightarrow u_p < u_q$. □