Exercices

Suites

Exercice 1

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_0, u_1, u_3 et u_{10} lorsque c'est possible

1. $u_n = \sqrt{n-1} + 2n$
2. $u_n = \dfrac{5n-3}{2n-2}$
3. $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$
4. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Correction

1. $u_n = \sqrt{n-1} + 2n$ donc :
   - u_0 n'est pas défini à cause de la racine carrée ;
   - $u_1 = \sqrt{0} + 2 = 2$;
   - $u_3 = \sqrt{2} + 6$;
   - $u_{10} = \sqrt{9} + 20 = 23$.
2. $u_n = \dfrac{5n-3}{2n-2}$ donc :
   - $u_0 = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$;
   - u_1 n'est pas défini car 1 est une valeur interdite du quotient ;
   - $u_3 = \dfrac{12}{4} = 3$;
   - $u_{10} = \dfrac{47}{18}$.
3. $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ donc :
   - $u_0 = \cos(0) = 1$;
   - $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;
   - $u_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$;
   - $u_{10} = \cos\left(\frac{10\pi}{2}\right) = \cos(5\pi) = -1$.
4. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc :
   - $u_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$;
   - $u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = \dfrac{1}{2}$;
   - $u_3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$;
   - $u_{10} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$.

Exercice 2

1. On considère l'algorithme suivant.

   Pour i allant de 1 à 10 **faire**
   $U \leftarrow 2i - 1$
   Fin Pour

   a) Quelle est la dernière valeur U calculée par cet algorithme ?
   b) On appelle (u_n) la suite associée aux valeurs calculées par l'algorithme. Donner l'expression du terme général de cette suite.
   c) Implémenter en langage Python l'algorithme.

2. On considère un autre algorithme.

   $U = 2$
   Pour i allant de 1 à 123 **faire**
   $U \leftarrow U + 1{,}23$
   Fin Pour

   a) Donner l'expression du terme général de cette suite.
   b) Implémenter en langage Python l'algorithme.

Correction

1. a) La dernière valeur calculée est pour $i = 10$ soit $U = 2\times 10-1 = 19$.
   b) $u_n = 2n-1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   c) Il y a un décalage d'indice sur Python, `range(1,11)` est l'intervalle entier de 1 à 10.

```
for i in range(1,11):
    U=2*i-1
```

2. a) On reconnait la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n + 1{,}23$ d'une suite arithmétique de raison $r = 1{,}23$.
   Ainsi, on a la forme explicite :

$$u_n = u_0 + nr = 2+1{,}23n.$$

   b)

```
U=2
for i in range(1,124):
    U=U+1.23
```

Exercice 3

Pour chacune des suivantes définies sur $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de n.

1. $u_n = 6n+8$
2. $u_n = n^2-2n+8$
3. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$
4. $u_n = 5^n$
5. $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$
6. $u_n = \dfrac{9n-5}{4n+6}$
7. $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{n+1}$

Correction

1. $u_{n+1} = 6(n+1)+8 = 6n+14$
2. $u_{n+1} = (n+1)^2-2(n+1)+8 = n^2+2n+1-2n-2+8 = n^2+7$
3. $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n+3}$
4. $u_{n+1} = 5^{n+1}$
5. $u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}}$
6. $u_{n+1} = \dfrac{9(n+1)-5}{4(n+1)+6} = \dfrac{9n+4}{4n+10}$
7. $u_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)^2}{n+2}\right)^{n+2}$

Exercice 4

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ pour $n \geqslant 0$.
2. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
3. $u_n = n^2-3n+12$ pour $n \geqslant 0$.
4. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.

Correction

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on doit connaître le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$. On peut aussi s'intéresser au signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$ dans le cas d'une suite à termes strictement positifs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

   Notons que $u_{n+1}-u_n > 0 \Leftrightarrow (n+2)^2-(n+1)(n+3) > 0$.
   Or $(n+2)^2-(n+1)(n+3) = n^2+4n+4-n^2-4n-3 = 1 > 0$.
   Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{3n}{n+1} \geqslant \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2} > 1$$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \geqslant 1$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$ car (u_n) est à termes strictement positifs.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 3(n+1) + 12 - n^2 + 3n - 12 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 12 - n^2 + 3n - 12 \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 1$, c'est-à-dire, $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang 1}}$ (strictement à partir du rang 2).

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

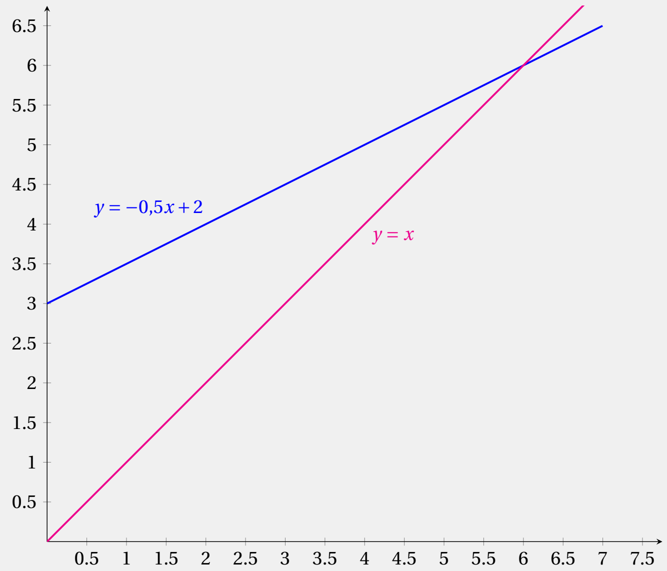
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{2n(n+2) - (n+1)(n+2) - n(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n^2 + 4n - n^2 - 3n - 2 - n^2 - n}{n(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{2}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \geqslant 1$, c'est-à-dire, $\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$

Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x + 3$ et la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.



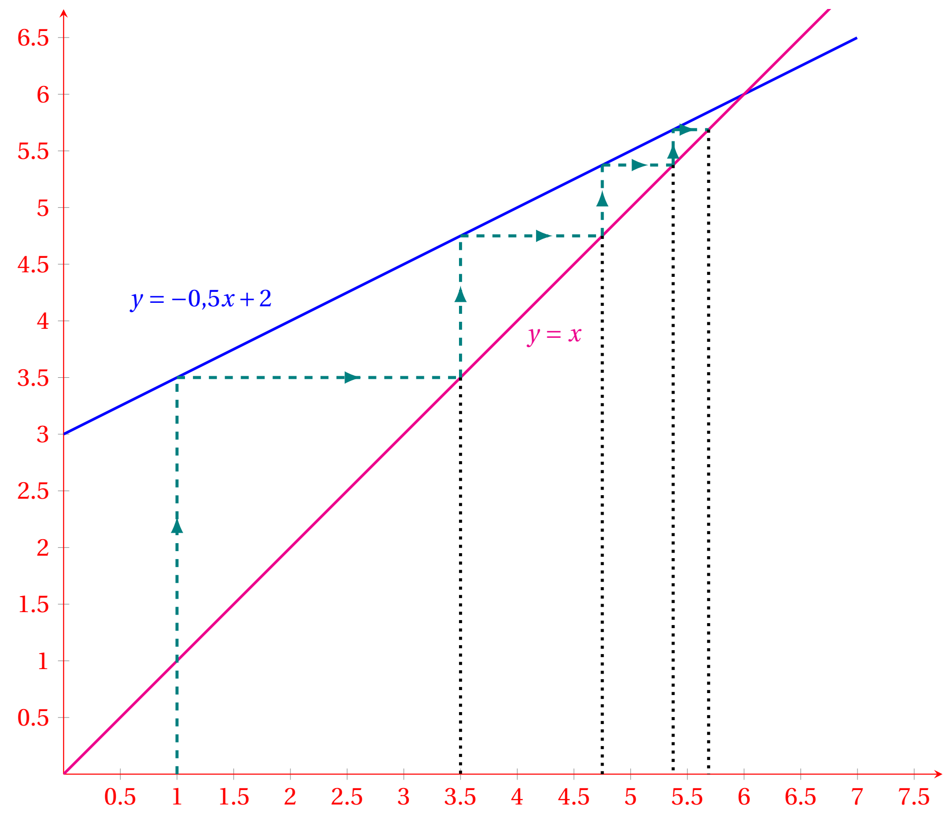
1. Reproduire la figure et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2. Conjecturer le sens de variation de (u_n).

3. Conjecturer la limite de la suite.

Correction

1. On a : $u_0 = 1$; $u_1 = 3{,}5$; $u_2 = 4{,}75$; $u_3 = 5{,}375$ et $u_4 = 5{,}6875$



2. La suite semble croissante.
3. La suite semble converger vers 6.
   6 est appelé *point fixe* de f car $f(6) = 6$.

Exercice 6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par $d_n = v_n - u_n$.
   a) Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on donnera sa raison et son premier terme.
   b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par $s_n = u_n + v_n$.
   a) Calculer s_0, s_1 et s_2. Que peut-on conjecturer ?
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = s_n$. Qu'en déduit-on ?
4. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Correction

1.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3u_0 + 2v_0}{5} = \frac{3 \times 1 + 2 \times 2}{5} = \frac{7}{5} \\ v_1 &= \frac{2u_0 + 3v_0}{5} = \frac{2 \times 1 + 3 \times 2}{5} = \frac{8}{5} \\ u_2 &= \frac{3u_1 + 2v_1}{5} = \frac{3 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{8}{5}}{5} = \frac{37}{25} \\ v_2 &= \frac{2u_1 + 3v_1}{5} = \frac{2 \times \frac{7}{5} + 3 \times \frac{8}{5}}{5} = \frac{38}{25} \end{aligned}$$

2. a) Pour montrer que (d_n) est géométrique, on doit prouver qu'il existe $q \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = q d_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{2u_n + 3v_n}{5} - \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ &= \frac{v_n - u_n}{5} \\ &= \frac{1}{5}(v_n - u_n) \\ &= \frac{1}{5} d_n \end{aligned}$$

(d_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 - u_0 = 1$.

b) La forme générale de (d_n) est pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{d_n = d_0 q^n = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{5^n}}$$

3. **a)** $s_0 = u_0 + v_0 = 1 + 2 = 3$; $s_1 = u_1 + v_1 = \dfrac{7+5}{5} = 3$ et $s_2 = u_2 + v_2 = \dfrac{37+38}{25} = 3$.

(s_n) semble constante égale à 3.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \frac{3u_n + 2v_n}{5} + \frac{2u_n + 3v_n}{5} \\ &= \frac{5u_n + 5v_n}{5} \\ &= u_n + v_n \\ &= s_n \end{aligned}$$

(s_n) est bien constante égale à $s_0 = 3$.

Ainsi :

$$\boxed{u_n + v_n = 3.}$$

4. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n + v_n = 3 \\ v_n - u_n = \dfrac{1}{5^n} \end{cases}$.

C'est-à-dire, en additionnant, $2v_n = 3 + \dfrac{1}{5^n}$ donc $\boxed{v_n = \dfrac{3 + \frac{1}{5^n}}{2}.}$

On a, en soustrayant dans le système, $\boxed{u_n = \dfrac{3 - \frac{1}{5^n}}{2}.}$