Exercices

Dérivation et étude de fonctions

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x - 5$. f' est la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer l'expression de f'.
2. Étudier le signe de f' puis en déduire les variations de f.
3. En déduire les potentiels extremums locaux. Sont-ils globaux ?

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x + 4$.
2.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f(x)$ est un extremum local $\Rightarrow f'(x) = 0$.
   Ainsi, le seul candidat ici est $f(-2)$ qui est un minimum global à partir du tableau de variations.

Exercice 2

Étudier les variations des fonctions suivantes. En déduire les potentiels extremums locaux et indiquer lesquels sont globaux.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-3x+2)^3$.
2. g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\dfrac{2}{x}$.
3. h définie sur $[2\,;+\infty]$ par $h(x) = -\sqrt{2x-4}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -3 \times 3(-3x+2)^2 = -9(-3x+2)^2$.
   On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9(-3x+2)^2$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$ donc $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ pourrait être un extremum local mais on voit sur le tableau de variations qu'il n'en est pas un.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g'(x) = \dfrac{2}{x^2}$.
   On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

   Il n'y aucun extremum local car la dérivée est strictement positive.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = -\dfrac{2}{2\sqrt{2x-4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

$h(2)$ est un maximum global.

Exercice 3

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Cacluler $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Donner l'équation réduite de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 3.

Correction

1. f est définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ car 1 est valeur interdite.
2. On dérive un quotient. Soit $x \in I$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \times (x^2+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

Si on développe $(x-1)(x+3)$, alors $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = f'(x)$.

3. Étudions d'abord le signe de la dérivée f'.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

On peut maintenant donner les variations de f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

4. Une équation de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 3 est donnée par :

$$T_3(f) : y = f'(3)(x-3) + f(3).$$

On a $f'(3) = \dfrac{(3-1)(3+3)}{(3+1)^2} = \dfrac{2 \times 6}{16} = \dfrac{2}{3}$ et $f(3) = \dfrac{3^2+3}{3+1} = 4$.

Ainsi, $T_3(f) : y = \dfrac{2}{3}(x-3) + 4 = \dfrac{2}{3}x + 2$.

Exercice 4

Soit f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = mx^4 + x^2 - m$ où $m \in \mathbb{R}^*$. $\mathscr{C}_m$ est la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Démontrer que les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ ont deux points d'intersection A et B dont on précisera les coordonnées.

   On notera A le point dont l'abscisse est positive.

2. Vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, $\mathscr{C}_m$ passe par les deux points A et B.

3. Calculer m pour que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_m$ en A.

4. Dans quel ensemble doit se trouver m pour que la fonction f_m admette un seul extremum ?

5. *Deux courbes sont dites tangentes en un point M lorsque le point M appartient aux deux courbes et les deux courbes admettent en M une tangente commune.*

   Déterminer m pour que $\mathscr{C}_m$ soit tangente en A à la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -x^2 + 6x - 4$.

Correction

1. Chercher les points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ revient à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^4 + x^2 - 1 \\ y = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases}.$$

   En additionnant les deux équations, on a : $2y = 2x^2 \Leftrightarrow y = x^2$. En remplaçant dans la seconde ligne, on a :

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = 1 \end{cases}.$$

   Ainsi, les coordonnées des solutions sont $A(1;1)$ et $B(-1;1)$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}^*$.

   Vérifions que $A \in \mathscr{C}_m$, c'est-à-dire, $f_m(1) = 1$.

$$f_m(1) = m \times 1^4 + 1^2 - m = m + 1 - m = 1$$

   Vérifions que $B \in \mathscr{C}_m$, c'est-à-dire, $f_m(-1) = 1$.

$$f_m(1) = m \times (-1)^4 + (-1)^2 - m = m + 1 - m = 1$$

3. Déterminons d'abord l'équation réduite de (OA).

   Le coefficient directeur est égal à $\dfrac{1-0}{1-0} = 1$ et l'ordonnée à l'origine nulle car $O(0;0)$. Donc $(OA) : y = x$.

   Déterminons maintenant l'équation de la tangente T de $\mathscr{C}_m$ en A.

$$T : y = f_m'(1)(x-1) + f_m(1)$$

   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_m'(x) = 4mx^3 + 2x$ donc $f_m'(1) = 4m + 2$.

$$T : y = (4m+2)(x-1) + 1 = (4m+2)x + (1 - 4m - 2) = (4m+2)x - 1 - 4m$$

   Pour que T et (OA) aient la même équation réduite, cherchons m tel que $4m + 2 = 1$.

$$\begin{aligned} 4m + 2 &= 1 \\ 4m &= -1 \\ m &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Pour $\boxed{m = -\frac{1}{4}}$, on a bien $T : y = x$.

4. Si $f_m(x)$ est un extremum local alors $f_m'(x) = 0$. Cherchons les potentiels extremums locaux pour f_m :

$$\begin{aligned} f_m'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4mx^3 + 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow (4mx^2 + 2)x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2m} \text{ ou } x = 0. \end{aligned}$$

   1er cas : $m > 0$

   Il n'y a qu'un seul extremum local potentiel : $f(0) = -m$ et la dérivée ne change de signe qu'en 0 en étant strictement positive pour $x > 0$. Construisons un tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-m$	$\nearrow$	$+\infty$

$-m$ est l'unique extremum : le minimum global de f_m.

2nd cas : $m<0$

$f_m'(x)$ possède trois racines : $-\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}$, 0 et $\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}$.

On a d'abord, $f_m\left(-\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}\right)=f_m\left(\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}\right)=m\dfrac{1}{4m^2}-\dfrac{1}{2m}-m=-\dfrac{1}{4m}-m$
Construisons un tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}$		0		$\sqrt{-\dfrac{1}{2m}}$		$+\infty$
$4mx^2+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{4m}-m$	$\searrow$	$-m$	$\nearrow$	$-\dfrac{1}{4m}-m$	$\searrow$	$-\infty$

Il y a deux extremums locaux : $-\dfrac{1}{4m}-m$ atteint deux fois en un maximum global, et $-m$ un minimum local mais pas global.

Pour conclure, $\boxed{m \text{ doit appartenir à }]-\infty;0[}$ pour que f_m n'admette qu'un seul extremum.

5. Déterminons l'équation de la tangente T' de $\mathscr{P}$ en A.

On définit g telle que $\mathscr{P}: y=g(x)=-x^2+6x-4$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, $g'(x)=-2x+6$.
Finalement, $T': y=g'(1)(x-1)+g(1)=4(x-1)+1=4x-3$.

$T: y=(4m+2)x-1-4m$ et $T': y=4x-3$ ont la même équation réduite si, et seulement si, $\boxed{m=\frac{1}{2}.}$