

# DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée

Lundi 18 mai 2026

## EXERCICE 1 (4 POINTS)

Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants, où  $x$  désigne un nombre réel.

$$A = e^{3x} \times e^{-4x}$$

$$B = \frac{1}{(e^{2x})^2}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-x})^6}$$

$$D = \frac{1}{e^{-x}} \times e^{3x}$$

## CORRECTION

$$\begin{aligned} A &= e^{3x} \times e^{-4x} \\ &= e^{3x-4x} \\ &= \boxed{e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(e^{-x})^6} \\ &= \frac{1}{e^{-6x}} \\ &= \boxed{e^{6x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{(e^{2x})^2} \\ &= \frac{1}{e^{4x}} \\ &= \boxed{e^{-4x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{e^{-x}} \times e^{3x} \\ &= e^x \times e^{3x} \\ &= \boxed{e^{4x}} \end{aligned}$$

## EXERCICE 2 (5 POINTS)

Résoudre l'inéquation et les équations suivantes. Indiquer l'ensemble des solutions  $\mathcal{S}$ .

1.  $e^x \geq e^{2x+1}$

2.  $\frac{e^{3+x}}{e^{3-x}} = 1$

3.  $(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$

## CORRECTION

1.

$$e^x \geq e^{2x+1}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante, donc :

$$\begin{aligned} e^x &\geq e^{2x+1} \\ \Leftrightarrow x &\geq 2x+1 \\ \Leftrightarrow -x &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq -1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = ]-\infty; -1]$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{e^{3+x}}{e^{3-x}} = 1 &\Leftrightarrow e^{(3+x)-(3-x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

3.

$$(e^{-3x+6} - e)(e^{x^2} - 1) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$\begin{aligned} e^{-3x+6} - e = 0 &\Leftrightarrow e^{-3x+6} = e \\ &\Leftrightarrow -3x + 6 = 1 \\ &\Leftrightarrow -3x = -5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} e^{x^2} - 1 = 0 &\Leftrightarrow e^{x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{5}{3} \right\}$$

### EXERCICE 3 (7 POINTS)

On considère la fonction :

$$g : x \mapsto (x - 2)e^{-2x+6} + 3$$

définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$ .

1. a. Montrer que la dérivée de  $g$  vérifie pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$g'(x) = (-2x + 5)e^{-2x+6}.$$

b. Donner le tableau de signe de cette dérivée sur  $\mathbf{R}$ .

c. En déduire le tableau de variations de  $g$  sur  $\mathbf{R}$ .

2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité  $x$  (en tonnes) de métal vendue est donné par la fonction  $g$ .

a. Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?

b. Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

### CORRECTION

1. a. On pose :

$$u(x) = x - 2 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-2x+6}.$$

$u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur  $\mathbf{R}$  donc  $g = u \times v + 3$  l'est aussi. On a, pour tout  $x \in \mathbf{R}$  :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = -2e^{-2x+6}.$$

Comme :

$$g(x) = u(x)v(x) + 3,$$

on utilise la formule de dérivée d'un produit :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Donc :

$$g'(x) = e^{-2x+6} + (x - 2)(-2e^{-2x+6}).$$

On factorise par  $e^{-2x+6}$  :

$$g'(x) = (1 - 2(x - 2))e^{-2x+6}.$$

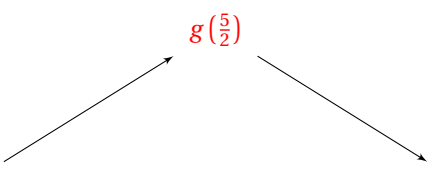
$$g'(x) = (-2x + 5)e^{-2x+6}.$$

Ainsi :

$$g'(x) = (-2x + 5)e^{-2x+6}$$

b.

c. On peut construire le tableau suivant.

$x$	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x + 5$	+	0	-
$e^{-2x+6}$	+		+
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$g\left(\frac{5}{2}\right)$ 		

2. a. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque :

$$g(x) > 0.$$

À la calculatrice, on obtient :

$$g(x) = 0 \iff x \approx 1,75.$$

Donc l'entreprise doit vendre au minimum environ :

1,75 tonnes

pour réaliser un bénéfice.

b. Le bénéfice maximal est atteint pour :

$$x = \frac{5}{2}.$$

Ce bénéfice maximal vaut :

$$g\left(\frac{5}{2}\right) = 3 + \frac{e}{2}.$$

Comme  $e \approx 2,72$  :

$$g\left(\frac{5}{2}\right) \approx 4,36.$$

Le bénéfice maximal est donc d'environ :

4,36 millions d'euros

pour une vente de :

2,5 tonnes

#### EXERCICE 4 (4 POINTS)

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. La vitesse de la goutte, en  $m \cdot s^{-1}$ , durant sa chute peut être modélisée par la suite  $(v_n)$  avec :

$$v_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}n}\right),$$

où :

- $n$  désigne le temps écoulé en seconde depuis que la goutte a quitté le nuage ;
- $m$  désigne la masse de la goutte en mg ;
- $k$  est la constante de frottement de l'air.

On donne  $k = 3,9$  et  $m = 6$  mg.

- Déterminer la vitesse de la goutte 10 s après sa chute.
- On note  $(T_n)$  la suite donnant la variation de la vitesse chaque seconde :

$$T_n = v_{n+1} - v_n.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$T_n = 9,81 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}n} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}}\right).$$

- En déduire que  $(T_n)$  est une suite géométrique décroissante dont on précisera la raison.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien de secondes la variation de vitesse devient inférieure à  $0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### CORRECTION

- On remplace  $m$  par 6 et  $k$  par 3,9 :

$$v_{10} = 9,81 \times \frac{6}{3,9} \left(1 - e^{-\frac{3,9}{6} \times 10}\right) \approx 15,03.$$

La vitesse de la goutte après 10 secondes est donc d'environ :

$$\boxed{15,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

- On a :

$$T_n = v_{n+1} - v_n.$$

Donc :

$$T_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}(n+1)}\right) - 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}n}\right).$$

On factorise :

$$T_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(-e^{-\frac{k}{m}(n+1)} + e^{-\frac{k}{m}n}\right).$$

Or :

$$e^{-\frac{k}{m}(n+1)} = e^{-\frac{k}{m}n} \times e^{-\frac{k}{m}}.$$

Donc :

$$T_n = 9,81 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}n} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}}\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{T_n = 9,81 \frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}n} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}}\right)}$$

- On a :

$$T_n = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}}\right) \left(e^{-\frac{k}{m}}\right)^n.$$

Donc  $(T_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = e^{-\frac{k}{m}}$  et de premier terme  $T_0 = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}}\right)$ .

Avec  $k = 3,9$  et  $m = 6$  :

$$q = e^{-\frac{3,9}{6}} \approx 0,522.$$

Comme :

$$0 < q < 1,$$

la suite est décroissante.

- À la calculatrice, on cherche le premier entier  $n$  tel que :

$$T_n < 0,001.$$

On obtient :

$$T_{13} \approx 0,0012 \quad \text{et} \quad T_{14} \approx 0,0006.$$

Donc la variation de vitesse devient inférieure à  $0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à partir de :

$$\boxed{14 \text{ secondes}}.$$