DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Lundi 19 janvier 2026

EXERCICE 1 (4 POINTS)

Donner les fonctions dérivées des fonctions d'expression suivantes. Préciser les ensembles de dérivabilité.

1. $f : x \mapsto -6\sqrt{x}$ **2.** $g : x \mapsto \dfrac{3x+1}{2}$ **3.** $h : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^2 - x - 7$

CORRECTION

1. f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$:

$$f'(x) = -6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{\sqrt{x}}.$$

2. g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

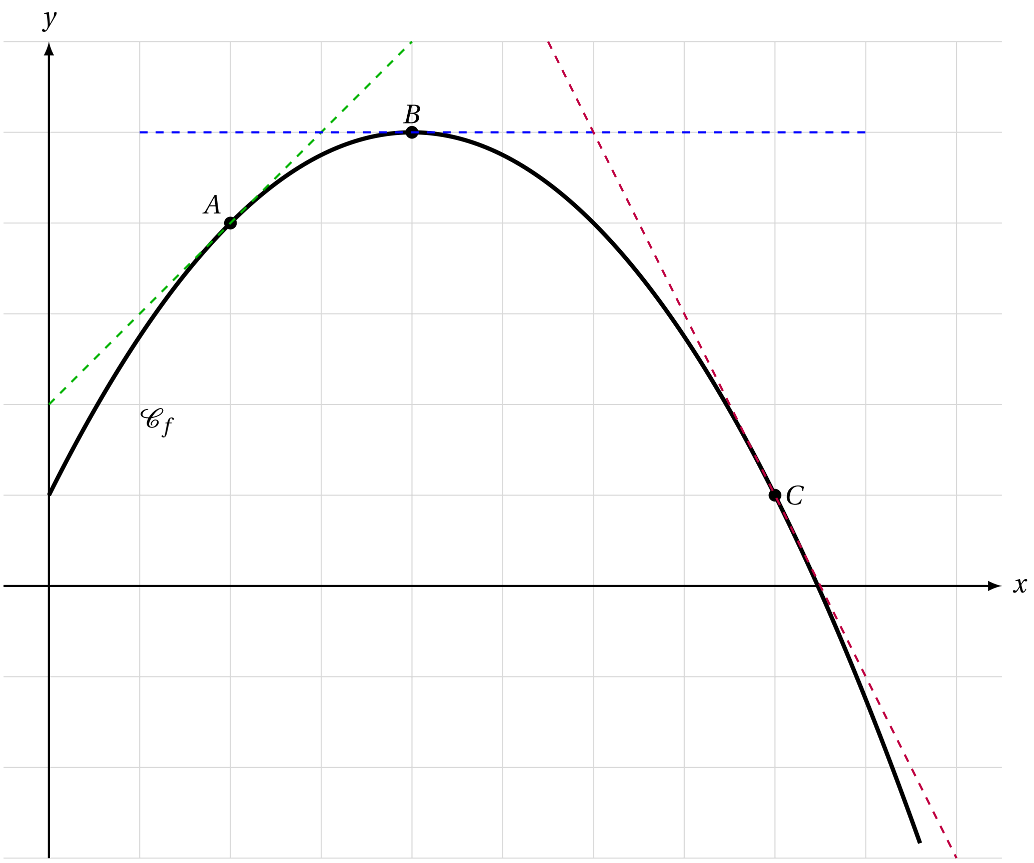
$$g'(x) = \frac{3}{2} \times 1 + 0 = \frac{3}{2}.$$

3. h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$h'(x) = \frac{1}{3} \times 2x - 1 \times 1 + 0 = \frac{2}{3}x - 1.$$

EXERCICE 2 (8 POINTS)

1. On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f ainsi que trois tangentes aux points A, B et C.



a. Lire **graphiquement** les nombres dérivés $f'(2)$, $f'(4)$ et $f'(8)$.

b. Donner une équation de droite pour chacune des tangentes tracées.

2. Un objet est lâché en chute libre du haut d'un mât. La distance parcourue par l'objet, en mètre, au bout de t secondes est donnée par

$$d(t) = 4{,}9t^2.$$

On admet que la vitesse instantanée de l'objet (en m·s^{-1}) au bout de t_0 secondes est égale au nombre dérivé $d'(t_0)$.

La vitesse de l'objet après deux secondes de chute est-elle égale au double de la vitesse après une seconde de chute ?

Justifier en utilisant les taux d'accroissement.

CORRECTION

1. **a.** $f'(2) = 1$; $f'(4) = 0$; $f'(8) = -2$

b.
- $T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2) \Leftrightarrow T_2 : y = (x-2)+4 \Leftrightarrow T_2 : y = x+2$.
- $T_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4) \Leftrightarrow T_4 : y = 0(x-4)+5 \Leftrightarrow T_4 : y = 5$.
- $T_8 : y = f'(8)(x-8) + f(8) \Leftrightarrow T_8 : y = -2(x-8)+1 \Leftrightarrow T_8 : y = -2x+17$.

2. Calculons $d'(1)$ et $d'(2)$.

- Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\tau_{1,1+h} &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \frac{4{,}9(1+h)^2 - 4{,}9\times 1^2}{h} \\
&= \frac{4{,}9(1+2h+h^2) - 4{,}9}{h} \\
&= 4{,}9\frac{2h+h^2}{h} \\
&= 4{,}9(2+h)
\end{aligned}$$

Quand $h \to 0$ alors, $\tau_{1,1+h} \to 4{,}9\times 2 = 9{,}8$.

$$d'(1) = 9{,}8$$

- Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\tau_{2,2+h} &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\
&= \frac{4{,}9(2+h)^2 - 4{,}9\times 2^2}{h} \\
&= \frac{4{,}9(4+8h+h^2) - 4{,}9\times 4}{h} \\
&= 4{,}9\frac{8h+h^2}{h} \\
&= 4{,}9(8+h)
\end{aligned}$$

Quand $h \to 0$ alors, $\tau_{2,2+h} \to 4{,}9\times 8 = 39{,}2$.

$$d'(2) = 39{,}2$$

Ainsi, la vitesse de l'objet après deux secondes de chute n'est pas égale au double de la vitesse après une seconde de chute. (L'évolution est dite quadratique.)

EXERCICE 3 (8 POINTS)

Chaque mois, une scierie fabrique jusqu'à 100 tonnes de planches de bois destinées à la fabrication de meubles. Le coût total de production de x tonnes de planches, en millier d'euros, est donné par :

$$C(x) = 0{,}04x^2 + 0{,}15x + 25{,}3 \quad \text{avec } x \in [0;100].$$

En économie, le **coût marginal** $C_m(x)$ représente le coût supplémentaire engendré par la production de la dernière tonne produite lorsqu'on a déjà produit $x-1$ tonnes. Ainsi, pour tout $x \in [0;100]$:

$$C_m(x) = C(x) - C(x-1).$$

1. Montrer que le coût marginal $C_m(x)$ correspond au taux d'accroissement de la fonction coût total C entre $x-1$ et x.

2. Donner une expression développée réduite de $C_m(x)$.

3. Calculer le coût marginal :

- **a.** de la 50^{e} tonne produite;
- **b.** de la 100^{e} tonne produite.

4. En général, on assimile la valeur du coût marginal de la q-ième tonne produite au nombre dérivé $C'(q)$.

- **a.** Déterminer $C'(50)$ et $C'(100)$.
- **b.** Les résultats obtenus sont-ils proches de ceux obtenus à la question **2**? L'assimilation entre le coût marginal $C_m(q)$ et le nombre dérivé $C'(q)$ semble-t-elle raisonnable?

CORRECTION

1. Soit $x \in [0;100]$.

Le taux d'accroissement de C entre $x-1$ et x est égal à :

$$\tau = \frac{C(x) - C(x-1)}{x-(x-1)} = \frac{C(x) - C(x-1)}{1} = C_m(x).$$

2. Soit $x \in [0;100]$.

$$\begin{aligned}
C_m(x) &= C(x) - C(x-1)\\
&= 0,04x^2 + 0,15x + 25,3 - \left(0,04(x-1)^2 + 0,15(x-1) + 25,3\right)\\
&= 0,04x^2 + 0,15x + 25,3 - \left(0,04(x-1)^2 + 0,15(x-1) + 25,3\right)\\
&= 0,04x^2 + 0,15x + 25,3 - \left(0,04x^2 - 0,08x + 0,04 + 0,15x - 0,15 + 25,3\right)\\
&= 0,04x^2 + 0,15x + 25,3 - \left(0,04x^2 + 0,07x + 25,19\right)\\
&= 0,08x + 0,11.
\end{aligned}$$

3. **a.** $C_m(50) = 0,08 \times 50 + 0,11 = 4,11$

b. $C_m(50) = 0,08 \times 100 + 0,11 = 8,11$

4. **a.** C est dérivable sur $[0;100]$ car polynomiale et pour tout $x \in [0;100]$:

$$C'(x) = 0,04 \times 2x + 0,15 = 0,08x + 0,15.$$

Ainsi, $C'(50) = 4,15$ et $C'(100) = 8,15$.

b. Les résultats obtenus sont proches : l'écart n'est que de 40 euros. L'assimilation paraît raisonnable.