Devoir surveillé 3

Calculatrice autorisée

Lundi 24 novembre 2025

Exercice 1 (10 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques emportés par les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note les événements :

- S : « Le voyageur fait sonner le portique ».
- M : « Le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.
On admet que :

- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est égale à 0,98.

1. Réaliser un arbre pondéré de la situation.

2. Calculer $\mathbb{P}\,(M \cap S)$.

3. Montrer que $\mathbb{P}(S) = 0{,}021\,92$.

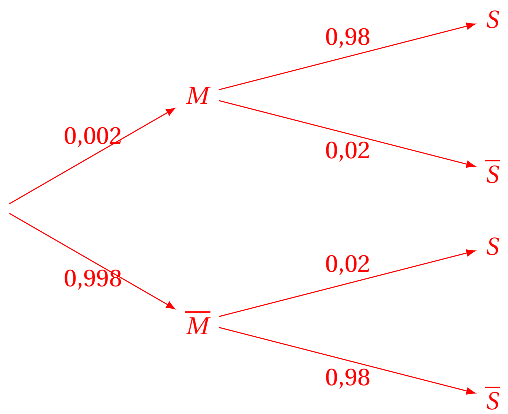
4. En déduire la probabilité qu'un passager porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique (arrondir à 10^{-3}).

5. Deux personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.

Calculer la probabilité que les deux personnes fassent sonner le portique.

Correction

1. Arbre pondéré :



2. $\mathbb{P}(M \cap S) = \mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(S) = 0{,}002 \times 0{,}98 = 0{,}001\,96$.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(S \cap M) + \mathbb{P}(S \cap \overline{M}) \\ &= 0{,}001\,96 + 0{,}998 \times 0{,}02 \\ &= 0{,}021\,92.\end{aligned}$$

4. $\mathbb{P}_S(M) = \dfrac{\mathbb{P}(S\cap M)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{0,00196}{0,02192} \approx 0,089.$

5. Notons P_1 l'évènement : « La première personne sonne » et P_2 : « la deuxième personne sonne ».

P_1 et P_2 sont indépendants donc :

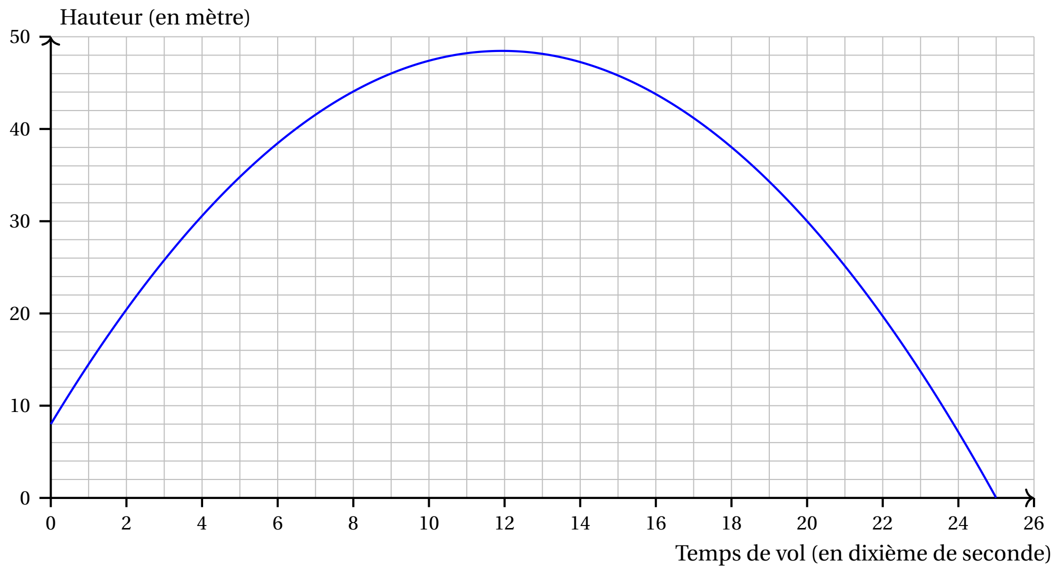
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(P_1\cap P_2\right) &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)\\ &= 0,02192\times 0,02192\\ &= 0,00048.\end{aligned}$$

Exercice 2 (10 points)

À l'occasion d'un festival pyrotechnique, un artificier se prépare à lancer des fusées à partir d'une plate-forme située à 8 mètres de hauteur. Il dispose de trois types de fusée, notés A, B et C.

Partie A

La hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type A en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, est modélisée par la courbe ci-dessous.



Répondre aux deux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Quelle hauteur atteindra la fusée A après 4 dixièmes de seconde de vol ?

2. Pour des raisons de sécurité, la fusée A doit exploser à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres.

Déterminer l'intervalle de temps auquel doit appartenir x pour satisfaire cette contrainte.

Partie B

On modélise la hauteur, en mètre, atteinte par les fusées de type B en fonction de leur temps de vol x, en dixième de seconde, par la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;20]$ par

$$f(x) = -0,5x^2 + 10x + 8.$$

Comme dans le cas des fusées de type A, l'explosion des fusées de type B doit avoir lieu lorsque celles-ci sont situées à une altitude supérieure ou égale à 40 mètres.

1. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver x pour satisfaire à cette contrainte.

2. Pour des raisons de sécurité, l'artificier souhaite faire exploser ses fusées de type B lorsque celles-ci seront à leur hauteur maximale. Quel temps de vol avant l'explosion doit-il alors programmer ?

Partie C

La fusée C voit sa hauteur modélisée par la fonction g définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;20]$ par

$$g(x) = -0{,}3x^2 + 7x + 8.$$

1. Donner une expression développée réduite de $f(x) - g(x)$ pour $x \in [0;20]$.

2. Étudier les positions relatives des courbes de f et g. Que peux-on en déduire sur les fusées B et C ?

CORRECTION

Partie A

1. Hauteur après 4 dixièmes : environ 30 m.

2. $h(x) \geqslant 40 \Leftrightarrow x \in [6{,}5;17{,}5]$.

Partie B

$f(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 8$.

1. Résoudre $f(x) \geqslant 40$:

$$-0{,}5x^2 + 10x + 8 \geqslant 40 \iff x^2 - 20x + 64 \leqslant 0.$$

En calculant les discriminants et les racines de $x^2 - 20x + 64$, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		4		16		$+\infty$
$x^2 - 20x + 64$		+	0	−	0	+	

$f(x) \geqslant 40 \iff x^2 - 20x + 64 \leqslant 0 \iff x \in [4;16]$.

2. Sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$ pour $x = \alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{10}{1} = 10$. Temps optimal : $x = 10$ (soit 1 s).

Partie C

$g(x) = -0{,}3x^2 + 7x + 8$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$f(x) - g(x) = (-0{,}5 + 0{,}3)x^2 + (10 - 7)x = -0{,}2x^2 + 3x.$$

2. $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ si $f(x) \geqslant g(x)$.

Étudions le signe de $-0{,}2x^2 + 3x = x(-0{,}2x + 3)$. Ses racines sont 0 et 15 donc :

x	$-\infty$		0		15		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		−	0	+	0	−	

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0;15]$ donc la fusée B est plus haute que la fusée C pendant 1 seconde et demi.