DEVOIR SURVEILLÉ 2

Calculatrice autorisée

Lundi 3 novembre 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

1. **a.** Soit $x \neq 0$. Montrer que les équations $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $x^2 - x - 1 = 0$ sont équivalentes.

   b. Résoudre $x^2 - x - 1 = 0$ dans $\mathbf{R}$.

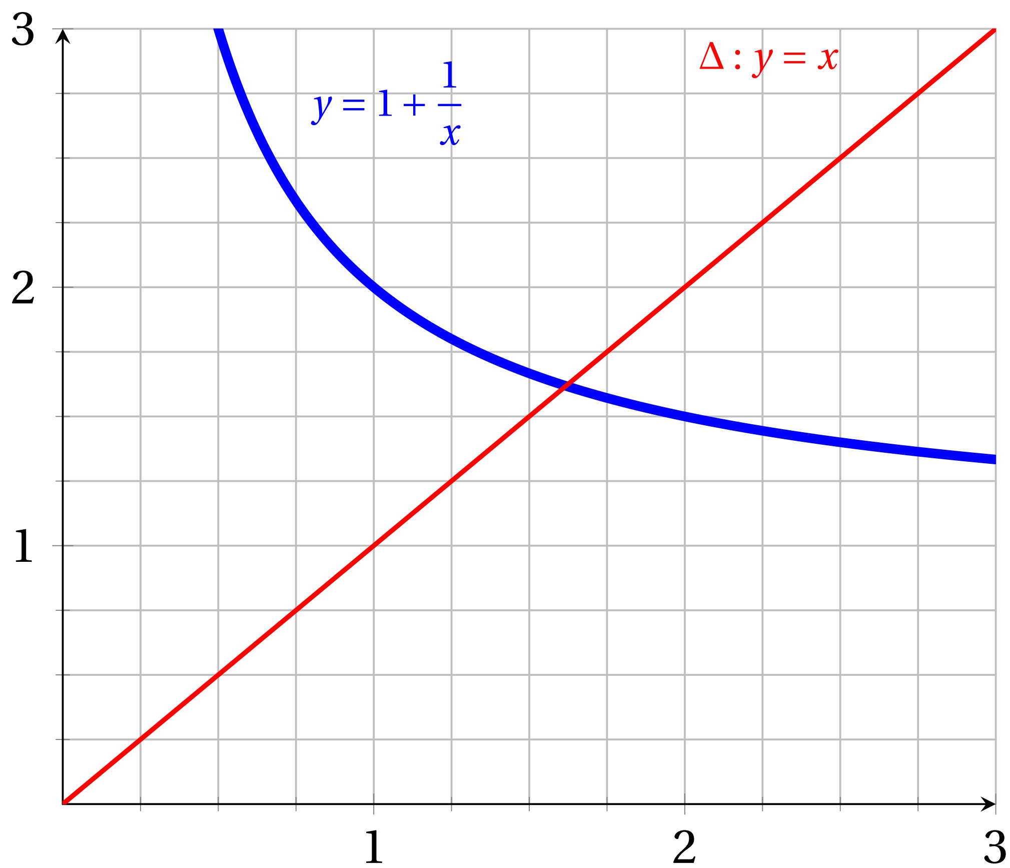
2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N} \ u_{n+1} = f(u_n).$$

   a. À l'aide des deux courbes suivantes, déterminer graphiquement les valeurs des cinq premiers termes de la suite (u_n).
   Faire apparaître les traces de construction sur le sujet.



   b. Quand n devient de plus en plus grand, vers l'abscisse de quel point semble se rapprocher u_n ?
   Cette suite permet d'approcher le nombre d'or par la méthode dite du « point fixe ».

   c. À l'aide des questions précédentes, donner la valeur exacte du nombre d'or.

CORRECTION

1. **a.** Soit $x \neq 0$. On a

$$x = 1 + \frac{1}{x} \iff x - 1 = \frac{1}{x} \iff x^2 - x = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

b. Résolvons $x^2 - x - 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$. Les solutions sont

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Les deux racines sont non nulles.

2. On pose $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1$.

a. Calcul des cinq premiers termes (u_0 à u_4) :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad u_3 = 1 + \frac{1}{3/2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$
$$u_4 = 1 + \frac{1}{5/3} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}.$$

b. En observant les valeurs calculées et le graphique, u_n semble se rapprocher d'une valeur proche de $1{,}618\ldots$ qui est l'abscisse du point fixe positif de f.

c. Les points fixes de f sont les solutions de $x = 1 + \dfrac{1}{x}$, donc les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$. La valeur exacte du nombre d'or (point fixe positif) est

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Exercice 2 (10 points)

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

a. La suite est-elle définie explicitement ou par récurrence ?

b. Calculer le terme initial de la suite puis u_1 et u_2.

c. Calculer le 10^{e} terme.

2. Soient les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = 3n^2 - n + 2 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 1, \\ v_{n+1} = v_n - 3n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a. Exprimer en fonction de n les termes suivants :

$$u_{n+1}, \quad u_n + 1, \quad u_{2n}, \quad v_{n+1} - v_n$$

b. Étudier les variations de (u_n).

c. Étudier les variations de (v_n).

Correction

1. **a.** La suite est définie de façon explicite.

b.

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{3}{4}.$$

c. Le dixième terme (pour $n = 9$) est

$$u_9 = \frac{9+1}{9+2} = \frac{10}{11}.$$

2. Soient $u_n = 3n^2 - n + 2$ et $v_0 = 1$, $v_{n+1} = v_n - 3n$.

a.

$$u_{n+1} = 3(n+1)^2 - (n+1) + 2 = 3n^2 + 5n + 4,$$
$$u_n + 1 = (3n^2 - n + 2) + 1 = 3n^2 - n + 3,$$
$$u_{2n} = 3(2n)^2 - 2n + 2 = 12n^2 - 2n + 2,$$
$$v_{n+1} - v_n = -3n.$$

b. Variations de (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = (3n^2 + 5n + 4) - (3n^2 - n + 2) = 6n + 2.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $6n + 2 > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbf{N}$.

c. Variations de (v_n) :

On a $v_{n+1} - v_n = -3n$. Pour $n = 0$ la différence vaut 0. Pour $n \geq 1$, $-3n < 0$. Donc (v_n) est constante entre v_0 et v_1 puis strictement décroissante pour $n \geqslant 1$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = \dfrac{7^n}{n+1}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

3. Conclure sur les variations de (u_n).

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $7^n > 0$ et $n + 1 > 0$, donc $u_n > 0$.

2.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{7^{n+1}/(n+2)}{7^n/(n+1)} = 7 \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Or pour $n \in \mathbf{N}$ on a $7(n+1) > n+2$ (puisque $6n + 5 > 0$), donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

3. Comme le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout n, la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbf{N}$.