DEVOIR SURVEILLÉ 1

Calculatrice autorisée

Lundi 29 septembre 2025

EXERCICE 1 (6 POINTS)

Pour chacune des questions suivantes, entourer sur le sujet la bonne réponse. Aucune justification n'est attendue.

1. Une expression factorisée de $x^2 - 15x + 14$ est :

a) $x(x-15)+14$ b) $(x-7)(x-2)$ c) $(x-1)(x-14)$

2. Une expression développée de $(2x-1)(-x+3)$ est :

a) $5x-3$ b) $-2x^2+5x-3$ c) $-2x^2+7x-3$

3. Une expression factorisée de $(3x+1)^2-25$ est :

a) $3(3x-4)(x+2)$ b) $9x^2+6x-24$ c) $(3x-4)^2$

4. Une expression développée de $2(x-1)^2-3$ est :

a) $4x^2-8x+1$ b) $2x^2-5$ c) $2x^2-4x-1$

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.

1. $10x^2-17x+3=0$

2. $4x^4-13x^2+3=0$

CORRECTION

1. $10x^2-17x+3=0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2-4ac$.

$$\Delta = (-17)^2 - 4\cdot 10\cdot 3 = 289-120 = 169.$$

Δ est strictement positif donc il y a deux solutions réelles distinctes.

On a :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17+13}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{17-13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

$\boxed{x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{1}{5}}$.

2. $4x^4-13x^2+3=0$.

Posons $X=x^2$ avec $X\geq 0$. L'équation devient

$$4X^2-13X+3=0.$$

Discriminant :

$$\Delta_X = (-13)^2-4\cdot 4\cdot 3 = 169-48 = 121, \qquad \sqrt{\Delta_X}=11.$$

$$X = \frac{13\pm 11}{8} \Leftrightarrow X=3 \text{ ou } X=\frac{1}{4}.$$

Revenir à x :

$$x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}, \qquad x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\boxed{x\in\left\{-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right\}}.$$

EXERCICE 3 (4 POINTS)

1. En précisant les éventuelles valeurs interdites, résoudre dans **R** l'équation :

$$x+1=\frac{42}{x}.$$

2. En déduire la résolution de l'équation :

$$x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$$

(on pourra poser $X=x^2+x$).

CORRECTION

1. $x+1=\frac{42}{x}$ a pour valeur interdite $x=0$.
Si on multiplie par $x\neq 0$, alors :

$$x+1=\frac{42}{x}$$
$$\Leftrightarrow x^2+x=42$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-42=0$$

Discriminant :

$$\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot(-42)=1+168=169,\ \sqrt{\Delta}=13.$$
$$x=\frac{-1\pm 13}{2}\Leftrightarrow x=\frac{12}{2}=6 \text{ ou } x=\frac{-14}{2}=-7.$$

$$\boxed{x=6 \text{ ou } x=-7}.$$

2. Les valeurs interdites sont les x tels que $x^2+x=0$ ce qui arrive quand $x=0$ ou $x=1$.
Posons $X=x^2+x$ pour $x\neq 1$ et $x\neq 0$. L'équation devient

$$X+1=\frac{42}{X}$$

Par la question précédente, $X=6$ ou $X=-7$.
Étudions chaque cas :

- $x^2+x=6 \iff x^2+x-6=0$. Discriminant : $\Delta=1+24=25$, $\sqrt{\Delta}=5$.
$$x=\frac{-1\pm 5}{2}\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=-3.$$
- $x^2+x=-7 \iff x^2+x+7=0$. Discriminant : $\Delta=1-28=-27<0$. Pas de solution réelle.

Solutions finales :

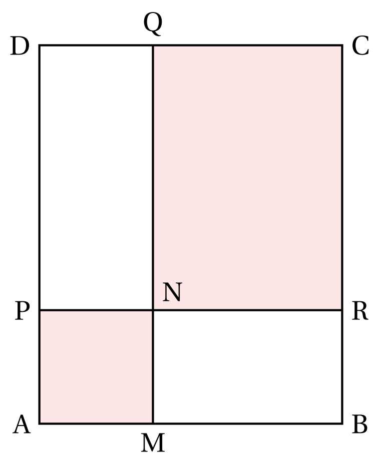
$$\boxed{x=2 \text{ ou } x=-3}.$$

EXERCICE 4 (6 POINTS)

ABCD est un rectangle tel que :

$$AB=8\text{ m}\quad \text{et}\quad AD=10\text{ m}$$

On partage ce rectangle en quatre zones : un carré $AMNP$ et trois rectangles $MBRN$, $NRCQ$ et $PNQD$.



On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ la somme des aires du carré $AMNP$ et du rectangle $NRCQ$.

1. À quel intervalle x doit-il appartenir ?

2. Montrer que :

$$f(x) = 2x^2 - 18x + 80.$$

3. Pour quelles positions du point M la somme des aires du carré $AMNP$ et du rectangle $NRCQ$ est-elle égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$?

CORRECTION

1. On doit avoir $8 \geqslant AM = x \geqslant 0$, c'est-à-dire, $x \in [0;8]$.

2. Aire du carré $AMNP$: x^2.
Le rectangle $NRCQ$ a pour côtés $8 - x$ et $10 - x$. Son aire est $(8-x)(10-x)$.
Donc :

$$f(x) = x^2 + (8-x)(10-x) = x^2 + (80 - 18x + x^2) = 2x^2 - 18x + 80.$$

3. Résolvons $f(x) = \frac{80}{2}$.

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 18x + 80 = 40 \\ \iff & 2x^2 - 18x + 40 = 0 \\ \iff & x^2 - 9x + 20 = 0 \end{aligned}$$

Discriminant :

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1, \ \sqrt{\Delta} = 1.$$

$$x = \frac{9 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 5.$$

$$\boxed{x = 4 \text{ ou } x = 5}.$$