DEVOIR MAISON

Calculatrice autorisée

à rendre le lundi 20 avril 2026

EXERCICE 1

Détermination de l'expression d'une fonction

Déterminer l'équation d'une parabole passant par les points A(0;5), B(3;1), sachant de plus que la tangente en B a pour coefficient directeur 2.

CORRECTION

Notons f une fonction polynomiale du second degré dont sa courbe $\mathscr{C}_f$ passe par A et B. Son expression est sous la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On a donc (f étant dérivable sur $\mathbf{R}$) :

$$f(x) = 2ax + b.$$

- $A(0;5) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(0) = c = 5$
- $B(3;1) \in \mathscr{C}_f$ donc $f(3) = 9a + 3b + 5 = 1$
- $f'(3) = 2$ donc $6a + b = 2$

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 9a+3b+5=1 \\ 6a+b=2 \end{cases}$.

$\begin{cases} 9a+3b+5=1 \\ 6a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b=-4 \\ 6a+b=\ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{9} \\ b=-\frac{14}{3} \end{cases}$.

La parabole recherchée a pour équation $y = \dfrac{10}{9}x^2 - \dfrac{14}{3}x + 5$.

EXERCICE 2

Étude de la fonction $x \mapsto \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right]$

On donne ci-contre le tableau résumant la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	x_1	x_2
p_i	p_1	p_2

Soit x un réel. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right]$$

1. Développer $(X-x)^2$.

2. Donner le tableau de loi de X^2.

3. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x^2 - 2(p_1x_1 + p_2x_2)x + (p_1x_1^2 + p_2x_2^2)$$

4. **a.** Justifier que f est un polynôme de degré 2 dont on donnera les coefficients.

b. Montrer que f admet un minimum. En quelle valeur est-il atteint ? Que représente ce minimum pour la variable aléatoire X ?

Correction

1. $(X-x)^2 = X^2 - 2Xx + x^2$ par identité remarquable.

2.

x_i^2	x_1^2	x_2^2
p_i	p_1	p_2

3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{E}\left[(X-x)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2Xx + x^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[2Xx\right] + \mathbb{E}\left[x^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2x\mathbb{E}\left[X\right] + x^2 \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{E}[X] = p_1x_1 + p_2x_2$ et $\mathbb{E}[X^2] = p_1x_1^2 + p_2x_2^2$.

Ainsi,

$$f(x) = x^2 - 2(p_1x_1 + p_2x_2)x + (p_1x_1^2 + p_2x_2^2).$$

4. **a.** $f(x)$ est sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2(p_1x_1 + p_2x_2)$ et $c = p_1x_1^2 + p_2x_2^2$.

b. La courbe de f est une parabole ouverte car $a > 0$ et donc f admet un minimum.

Il est atteint en $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2(p_1x_1 + p_2x_2)}{2} = p_1x_1 + p_2x_2 = \mathbb{E}[X]$.

Le minimum lui est égal à $f(\alpha) = f\left(\mathbb{E}[X]\right) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \text{Var}(X)$.

La variance de X est le minimum de la fonction f.