Devoir surveillé 3

Calculatrice autorisée

Jeudi 13 avril 2023

Exercice 1 (12 points)

Déterminer, pour chacune des fonctions f, l'expression de sa fonction dérivée f' sur l'intervalle I indiqué.

1. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + 7$; $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$; $I =]0;+\infty[$
3. $f(x) = 5(x-2)^2$; $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{1+3x}$; $I = \left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$
5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = x - \dfrac{4}{x+1}$; $I = \mathbb{R}_+$
7. $f(x) = \dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{x+3}}$; $I =]-3;+\infty[$
8. $f(x) = \sqrt{x-2}\left(\dfrac{1}{x} - x^3\right)$; $I =]2;+\infty[$

Correction

1. $f'(x) = -x^2 + 6x - 2$
2. $f'(x) = \dfrac{6}{x^4}$
3. $f'(x) = 10(x-2) = 10x - 20$
4. $f'(x) = -\dfrac{12}{(1+3x)^2}$
5. $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
6. $f'(x) = 1 + \dfrac{4}{(x+1)^2}$
7. $f'(x) = \dfrac{2(x+3)\sqrt{x+3} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x+3)^2}{\sqrt{x+3}^2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+3}$
8. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\left(\dfrac{1}{x} - x^3\right) + \sqrt{x-2}\left(-\dfrac{1}{x^2} - 3x^2\right)$

Exercice 2 (4 points)

Soit g une fonction définie sur I.

Dans chaque cas, donner l'expression d'une fonction f dérivable sur I telle que $f' = g$.

1. $g(x) = x^2 + 3x + 1$; $I = \mathbb{R}$
2. $g(x) = \dfrac{2}{x^2} - 1$; $I = \mathbb{R}_+^*$

f est appelée une primitive de g sur I.

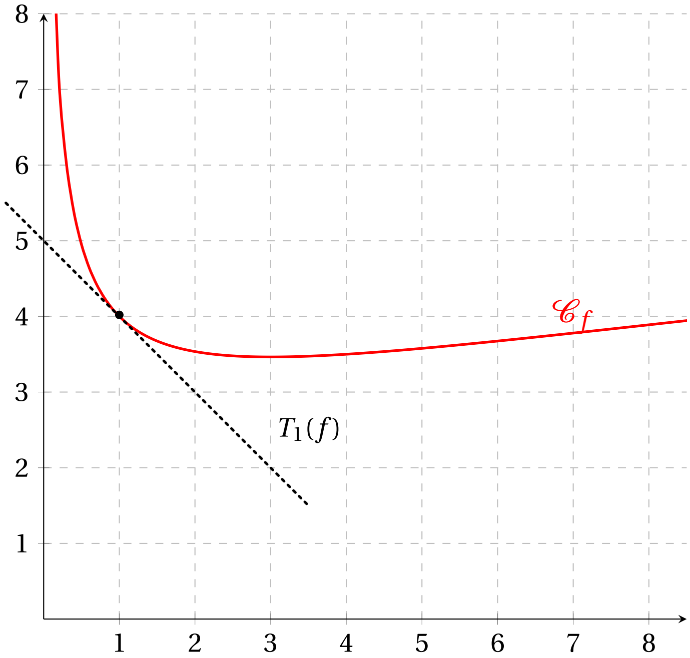
Correction

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$ convient.
2. $f(x) = -\dfrac{2}{x} - x$ convient.

Exercice 3 (4 points)

1. Donner la forme générale de l'équation de $T_a(f)$: la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a où $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f, une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

2. On considère le graphique suivant.



a. Donner l'équation réduite de $T_1(f)$.

b. Donner le tableau de signes de f'.

Correction

1.

$$T_a(f) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2. **a.** Par lecture graphique du coefficient directeur et ordonnée à l'origine.

$$T_1(f) : y = -x + 5$$

b. f est décroissante sur $]0;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$. ainsi on a le tableau de signes de f'.

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	