

8

DÉRIVATION

📌 Résumé

Pan incontournable de l'analyse, la dérivation est un domaine des mathématiques aux applications diverses. La principale application que l'on abordera ici est l'étude des variations d'une fonction dérivable.

⚠️ Attention

Dans toute la suite, I désignera un intervalle ouvert et f une fonction définie sur I .

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

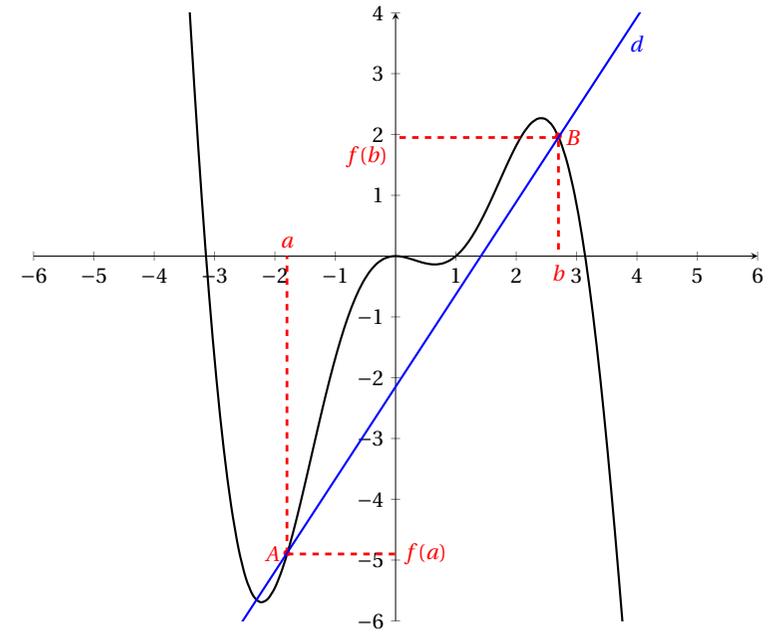
1.1 Taux d'accroissement

Définition

Soient $a \in I$ et $b \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et b le nombre suivant :

$$\tau_{f,a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque $\tau_{f,a,b}$ représente graphiquement le **coefficient directeur** (ou la pente) de la droite d passant les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.



Exemples ► Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 + 5$.

Le taux d'accroissement de f entre 2 et 3 est :

$$\tau_{f,2,3} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{(5 \times 3^2 + 5) - (5 \times 2^2 + 5)}{1} = 5 \times (9 - 4) = 25.$$

► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{3}{x}$.

Le taux d'accroissement de f entre 1 et 4 est :

$$\tau_{f,1,4} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{1}}{3} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

1.2 Nombre dérivé

Définition

Soit $a \in I$ un nombre **fixé**.

Considérons, pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre a et $a + h$:

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si, quand h prend des valeurs infiniment proches de 0 ($h \rightarrow 0$), $\tau(h)$ se stabilise autour d'une valeur limite, alors on dira que f est **dérivable en a** . La valeur limite est appelée **nombre dérivé** de f en a , notée $f'(a)$.

On notera à l'avenir :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(a).$$

Remarque Graphiquement, le nombre dérivé correspond au *taux d'accroissement instantané* autour de a . Il donne une tendance locale des variations de f .

Exemples ▶

▶ Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$. Montrons que f est **dérivable** en 3.

Soit $h \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \frac{(2 \times (3+h)^2 - 7 \times (3+h) + 1) - (2 \times 3^2 - 7 \times 3 + 1)}{h} \end{aligned}$$

On développe et on réduit au numérateur, puis on simplifie par h qui est non nul.

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{2h^2 + 5h}{h} \\ &= 2h + 5 \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, alors les valeurs de $2h + 5$ tendent vers 5.

Ainsi, f est dérivable en 3. De plus, $f'(3) = 5$ car $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 5$.

▶ Soit f définie sur $[6; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-6}$. f n'est **pas dérivable** en 6.

En effet, si $h \neq 0$ et $\tau(h) = \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$, alors :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{\sqrt{(6+h)-6} - \sqrt{6-6}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned}$$

$\tau(h)$ n'admet pas de valeur limite si $h \rightarrow 0$. Les valeurs sont de plus en plus grandes et sans plafond, on notera $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = +\infty$.

1.3 Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition

Soit I' l'ensemble sur lequel f est dérivable, c'est-à-dire tel que pour tout $a \in I'$, f est dérivable en a .

On construit la **fonction dérivée** de f , notée f' , comme la fonction définie sur I' telle que l'image de $x \in I'$ est le nombre dérivé $f'(x)$.

Remarque On souhaiterait déterminer de manière générale tous les nombres dérivés de f . Nous allons le faire pour les fonctions usuelles, c'est-à-dire, celles que l'on utilise très souvent.

Théorème | Fonctions constantes

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = c$ avec c une constante réelle. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{c-c}{h} \\ &= \frac{0}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$. □

Théorème | Fonctions affines

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} \\ &= \frac{ah}{h} \\ &= a\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = a$. □

Théorème | Fonction carré

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= 2x + h\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 2x$. □

Théorème | Fonction cube

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{(x+h)(x^2 + 2xh + h^2) - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 3x^2$. □

Théorème | Fonction monôme

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$, n étant un nombre entier naturel non nul.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Démonstration. **HORS-PROGRAMME**

On se base sur la formule du *binôme de Newton* qui permet de développer une expression du type $(a+b)^n$.

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k h^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est un nombre égal à n pour $k=1$ et $k=n-1$. □

Théorème | Fonction racine carrée

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration. Soit $x \in]0; +\infty[$ fixé. Soit $h > 0$ de sorte que $x + h \in]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{|x+h| - |x|}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \square$$

Théorème | Fonction inverse

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ fixé. Soit $h \neq 0$ tel que $x+h \neq 0$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}\end{aligned}$$

On réduit au même dénominateur les fractions du numérateur.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\frac{x}{(x+h)x} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{-\frac{h}{(x+h)x}}{h} \\ &= -\frac{1}{(x+h)x}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = -\frac{1}{x^2}. \quad \square$$

Théorème | Fonctions inverses

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x^n}$, n étant un entier naturel non nul.

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Somme

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I .

La fonction $f+g$ définie sur I par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

On notera généralement $(f+g)' = f' + g'$.

Démonstration. Soit $x \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(x) + g'(x). \quad \square$$

Exemples On peut calculer des dérivées de fonctions composées à partir des fonctions usuelles.

► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

► Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5x - 8 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}.$$

2.2 Produit

Propriété | Produit par un scalaire

Soient f une fonction définie et dérivable sur I , et $k \in \mathbb{R}$ une constante réelle. La fonction kf définie sur I par $(kf)(x) = k \times f(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(kf)'(x) = k \times f'(x).$$

On notera généralement $(kf)' = kf'$.

Démonstration. C'est immédiat en considérant $\tau(h)$. □

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + x - 10$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 7 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 1.$$

Théorème | Produit de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . La fonction fg définie sur I par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

On notera généralement $(fg)' = f'g + g'f$.

Exemples ► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = (10 + 5x) \times \frac{1}{x}$.

$f(x)$ est sous la forme $f(x) = u(x)v(x)$.

$$u(x) = 10 + 5x \text{ et } u'(x) = 5.$$

$$v(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = 5 \times \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times (10 + 5x)$$

$$\text{C'est-à-dire, } f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{10}{x^2} - \frac{5x}{x^2} = -\frac{10}{x^2}.$$

► Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{x}\right)$.

$f(x)$ est sous la forme $f(x) = u(x)v(x)$.

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$v(x) = 1 + \frac{3}{x} \text{ et } v'(x) = -\frac{3}{x^2}.$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(1 + \frac{3}{x}\right) + \left(-\frac{3}{x^2}\right) \times \sqrt{x}$$

$$\text{C'est-à-dire, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

2.3 Quotient

Théorème | Quotient de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . Supposons que pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $\frac{f}{g}$ définie sur I par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

On notera généralement $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Exemple Soit f définie sur $]-\infty; \frac{1}{7}[\cup]\frac{1}{7}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{7x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 7$.

f est dérivable sur $]-\infty; \frac{1}{7}[\cup]\frac{1}{7}; +\infty[$ et pour tout $x \in]-\infty; \frac{1}{7}[\cup]\frac{1}{7}; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{3 \times (7x-1) - 7 \times (3x+2)}{(7x-1)^2}$$

On développe et réduit le numérateur : $f'(x) = -\frac{17}{(7x-1)^2}$.

2.4 Composition

Théorème | Composée affine

Soient a, b deux réels et f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction g définie par $g(x) = f(ax + b)$ pour tout x tel que $ax + b \in I$ est dérivable en de tels x et :

$$g'(x) = a \times f'(ax + b)$$

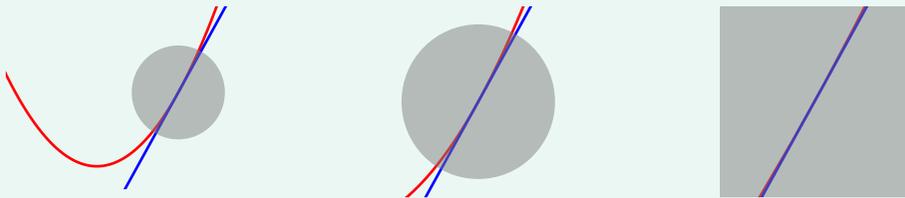
Exemple Soit f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x-8}$. f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-8}} = \frac{2}{\sqrt{4x-8}}$.

3 Tangente à une courbe

Définition

Si la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f est bien "lisse" au voisinage d'un point $A(a; f(a))$, on appelle **tangente** à \mathcal{C}_f en A la droite qui épouse localement la direction de cette courbe.

Autrement dit, en se rapprochant du point A , la courbe va finir par se confondre avec sa tangente en ce point.



Propriété | Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , alors $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de $T_a(f)$, la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Cette tangente admet pour **équation** :

$$T_a(f) : y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Démonstration. C'est direct par définition du nombre dérivé. □

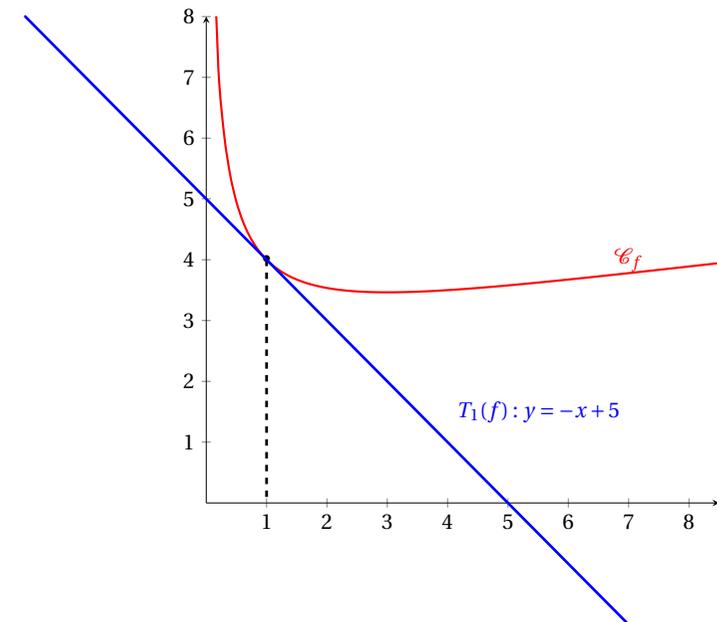
Exemple Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{x}\right)$. Déterminons l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

On a vu plus haut que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

Ainsi, $f(1) = \sqrt{1} \left(1 + \frac{3}{1}\right) = 4$ et $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{3}{2 \times 1\sqrt{1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

De plus, $f'(1) \times (x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 4 = -x + 5$. On peut donc donner l'équation attendue.

$$T_1(f) : y = -x + 5$$



4 Étude des variations d'une fonction

Propriétés | Lien dérivée/variations

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I .

- ▶ $f' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I .
- ▶ $f' = 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est constante sur I .
- ▶ $f' \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I .

Remarque Désormais, nous allons pouvoir construire des **tableaux de variations** à partir d'**études du signe de la dérivée**.

Exemple Construisons le tableau de variations de la fonction f définie sur $[-2; 4]$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$.

f est dérivable sur $[-2; 4]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[-2; 4]$.

On a pour tout $x \in [-2; 4]$, $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Étudions le signe de cette expression. Le discriminant Δ de $6x^2 - 6x - 12$ est égal à 324 et il y a deux racines réelles : -1 et 2 . Ainsi, nous pouvons construire le tableau de signes (le coefficient dominant étant strictement positif).

x	-2	-1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

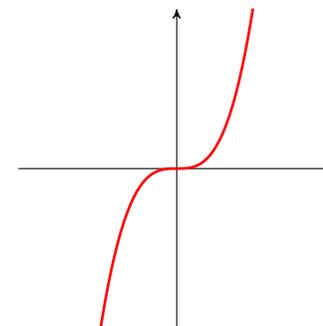
On déduit immédiatement le tableau de variations de f à partir des propriétés précédentes et en calculant $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$ et $f(4)$.

x	-2	-1	2	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	2	13	-14	38	

Théorème | Extremum

Si un **maximum local** ou un **minimum local** de f sur un intervalle I est atteint en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque La réciproque n'est pas toujours vraie. C'est le cas pour la fonction cube. On a $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(0) = 0$ mais pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local.



Exemple On peut déterminer des extremums locaux à partir de cette propriété par élimination.

▶ Si on regarde l'exemple précédent, les deux solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans $[-2; 4]$ sont -1 et 2 . Ce sont les antécédents de **potentiels extremums locaux**.

Il suffit de confronter le tableau de variations pour en avoir la confirmation.

$f(-1)$ est un **maximum local** atteint en -1 mais pas **global** puisque $f(4) = 38$.

$f(2)$ est un **minimum local** atteint en 2 et il est même **global** puisque pour tout $x \in [-2; 4]$, $f(x) \geq f(2)$.

▶ Soit f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = (x-1)^3 \sqrt{x}$.

f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On va utiliser toutes les propriétés d'opérations sur les dérivées pour déterminer f' . Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = (x-1)^3$ de dérivée $u'(x) = 3(x-1)^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$ de dérivée $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 3(x-1)^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^3 \\ &= (x-1)^2 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) \right) \end{aligned}$$

Cherchons les potentiels extremums locaux de f sur \mathbb{R}_+^* .

On doit résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 3x + \frac{1}{2}(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$f(1)$ et $f\left(\frac{1}{7}\right)$ sont des prétendants pour être des extremums locaux atteints respectivement en 1 et $\frac{1}{7}$.

On peut maintenant donner le tableau de variations à partir du tableau de signes de la dérivée.

x	0	$\frac{1}{7}$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)$	-	0	+	+
$f'(x)$	-	0	0	+
$f(x)$	0	$f\left(\frac{1}{7}\right)$	$f(1)$	$+\infty$

On observe que $f\left(\frac{1}{7}\right)$ est un **minimum** local et même global mais $f(1)$ n'est pas un extremum local.

On peut s'assurer graphiquement de la cohérence de nos conclusions.

