3

Probabilités conditionnelles et indépendance

Résumé

L'an dernier, les probabilités ont été revues et formalisées. Les cas et problèmes étudiés restaient simples : il nous faut d'autres outils comme les probabilités conditionnelles qui prennent en compte les dépendances d'événements entre eux.

1 Rappels sur les probabilités

1.1 Généralités

Définition

L'ensemble de toutes les **issues** (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).
Un sous-ensemble de cet univers est appelé un **événement**.

Propriété

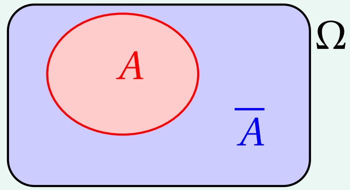
Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**.
Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables**, la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}.$$

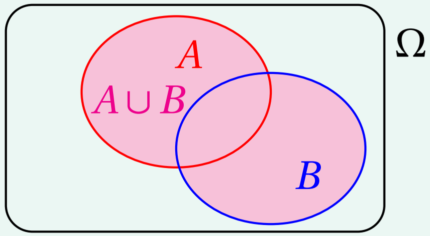
1.2 Calculs de probabilités

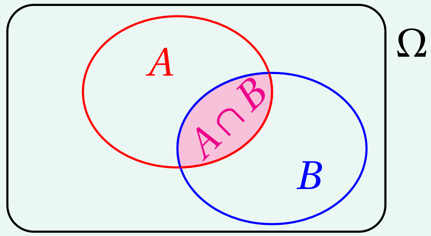
Définitions

L'**évènement contraire** d'un évènement A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble de toutes les issues qui ne réalisent pas A.



L'**intersection** $A \cap B$ de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque A **et** B se réalisent *simultanément.*
La **réunion** $A \cup B$ de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque l'*un au moins* des deux événements se réalise (l'un **ou** l'autre **ou** les deux).





Propriétés

Pour deux évènements A et B, on a :

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exemple Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints dune maladie. Certains sont traités avec le médicament A, dautres avec le médicament B.
Le tableau ci-dessous présente les résultats de létude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement "le patient a été traité avec le médicament A" et G : "il est guéri".

- $\overline{A}$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament B" ;
- $A \cap G$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament A **et** est guéri" ;
- $A \cup G$ est l'événement : "le patient a été traité avec le médicament A **ou** est guéri".

On a, de plus :

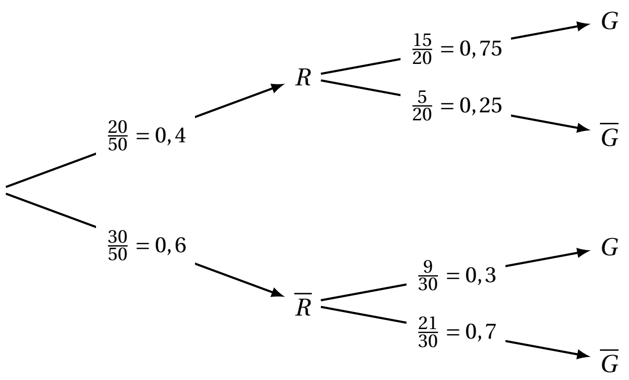
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{455}{800} = \dfrac{345}{800}$;
- $\mathbb{P}(A \cap G) = \dfrac{383}{800}$;
- $\mathbb{P}(A \cup G) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(A \cap G) = \dfrac{455}{800} + \dfrac{674}{800} - \dfrac{383}{800} = \dfrac{746}{800}$.

2 Arbre pondéré

Définition | Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.
À chaque **nœud**, on trouve toujours un événement.

Exemple - Tirage dans une urne Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions "Gagné" ou "Perdu". 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.
On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement "La boule tirée est rouge" et G "La boule tirée est gagnante".
On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :



Théorème

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de tous les branches qui le composent.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet événement.

Exemple - Tirage dans une urne La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = \mathbb{P}(R \cap G)$.
Sur l'arbre, on retrouve bien $0,4 \times 0,75 = 0,3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0,48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité $0,3$ et le chemin $\overline{R} \cap G$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$.
On retrouve aussi :

$$\mathbb{P}(R \cap G) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48 = \mathbb{P}(G)$$

.

3 Probabilités conditionnelles

Définition

Sur un arbre pondéré, les probabilités données sur les premières branches (les branches "primaires") sont des probabilités classiques, mais pour les branches suivantes ("secondaires"), ce sont des **probabilités conditionnelles**. En fait, ce sont les probabilités d'arriver à ce nœud *sachant que l'on vient de tel autre nœud*.
La probabilité conditionnelle que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé se note $\mathbb{P}_A(B)$ (à lire "probabilité de B sachant A").
Enfin, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque On peut évidemment inverser le rôle de A et B et si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exemple - Tirage dans une urne $\mathbb{P}_R(G) = 0,75$ est la probabilité de tirer une boule gagnante *sachant qu'elle est rouge*, autrement dit, la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les rouges*. Cette probabilité découle de la constitution de l'urne.

$\mathbb{P}_G(R)$ ne figure pas dans l'arbre. C'est la probabilité d'avoir tiré une boule rouge *sachant qu'elle est marquée gagnante*, autrement dit la probabilité de tirer une boule rouge gagnante *parmi les boules gagnantes*. C'est moins naturel dans ce sens, puisqu'on voit la couleur de la boule avant d'y trouver la marque.

$$\mathbb{P}_G(R) = \frac{\mathbb{P}(G \cap R)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625$$

On peut tout de même retrouver cette probabilité grâce à la constitution de l'urne : sur les $15+9=24$ boules gagnantes, il y en a 15 rouges et $\frac{15}{24} = 0,625$.

Propriétés

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
- $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

Démonstration. Le premier point est direct par les formules de probabilités sur un arbre pondéré.

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{B})}{\mathbb{P}(A)}$. Or, $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)$ donc :

$$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = 1 - \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = 1 - \mathbb{P}_A(B).$$

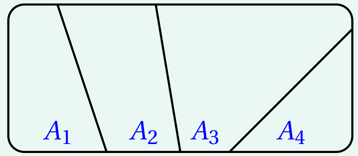
□

4 Probabilités totales

Définition | Partition de l'univers

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une liste d'événements relatifs à une même expérience aléatoire.
On dit que ces événements réalisent une **partition** de l'univers si :

- aucun de ces événements n'est impossible
- ils sont deux à deux disjoints (d'intersection vide)
- la réunion de tous ces événements recouvre l'univers tout entier.

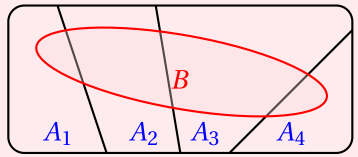


Remarque Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Théorème | Formule des probabilités totales

Pour une partition de l'univers $A_1, A_2, \dots, A_n$ et pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

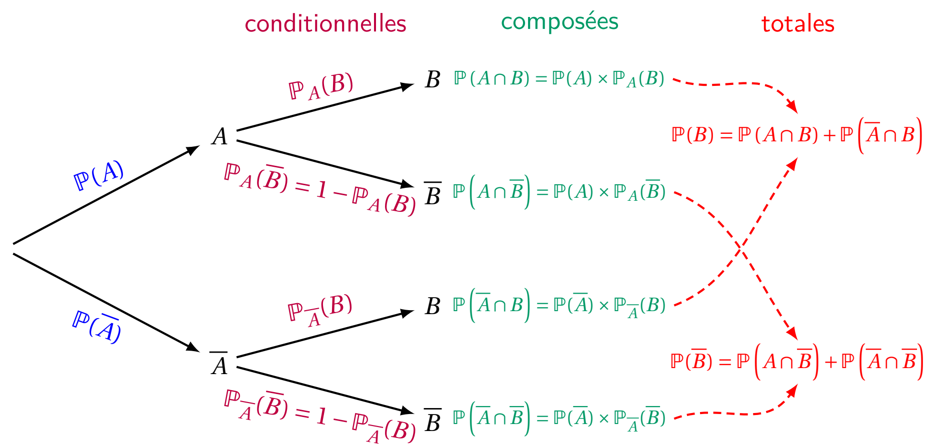


En particulier, pour tout événements A et B :

$$\mathbb{P}(B) = P(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Remarque Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :

- des conditionnelles ;
- les composées ;
- les totales.



5 Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Propriété

On a de façon équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration. Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, alors $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)}{P(B)}$. La réciproque est aussi directe et la deuxième équivalence se traite en échangeant le rôle de A et B. □

Remarque Pour montrer que A et B soient indépendants, il ne suffit que de vérifier une seule de ces trois conditions équivalentes.

Exemple On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement "Obtenir un cœur" et D "Obtenir une dame". $C \cap D$ est alors "Obtenir la dame de cœur".

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{32}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

  On a aussi $\mathbb{P}_C(D) = \mathbb{P}(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les cœurs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\frac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{34}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{34}$ et $\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D) = \frac{8 \times 4}{34 \times 34} \neq \mathbb{P}(C \cap D)$ donc C et D pas indépendants.

  De même, $\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{8}$ mais $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.

Définition | Épreuves indépendantes

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première n'ont aucune influence sur les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession d'épreuves indépendantes**.

Exemple On tire au hasard successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
Si on remet la carte avant le deuxième tirage, les conditions initiales sont identiques, donc on peut considérer que les deux tirages sont indépendants.
Si on ne remet pas la carte, la constitution du paquet dépend de la première carte tirée, donc les expériences ne sont pas indépendantes.

Propriété

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple On lance deux fois de suite un dé cubique.
La probabilité d'obtenir un double 5 est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$.