1

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Résumé

Après avoir étudié en seconde les fonctions affines, la fonction carré, la fonction inverse et la fonction racine carrée, nous allons élargir le catalogue de fonctions usuelles avec les fonctions polynômes du second degré. Le principal objectif du chapitre est de pouvoir résoudre des équations de degré 2 plus facilement.

1 Différentes formes d'écriture

1.1 Forme développée réduite

Définition

On appelle **polynôme du second degré** ou **trinôme** une expression de la forme

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \neq 0$$

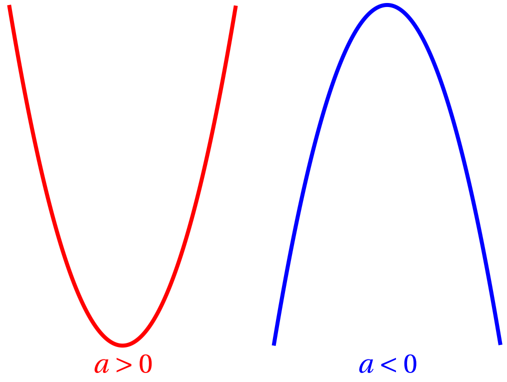
ou toute autre expression qui peut se réécrire sous cette forme, appellée **forme développée réduite**.
a, b, c sont les **coefficients** du polynôme.

Remarque *Polynôme* signifie *plusieurs monômes*. Un monôme est une expression de la forme ax^n, où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient** du monôme, et $n \in \mathbb{N}$ est son **degré**.

Exemples $3x^2 - x + 2$ ou x^2 sont des polynômes du second degré.

Remarques

- On va considérer à l'avenir des fonctions f dont l'expression est un polynôme : qu'on appelle **fonctions polynômes du second degré**. On veillera à ne pas confondre la *fonction* f avec son *expression* $f(x)$.
- La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est toujours une **parabole**. Elle est *ouverte* si a est positif, elle est *fermée* si a est négatif.



1.2 Forme factorisée

Définition

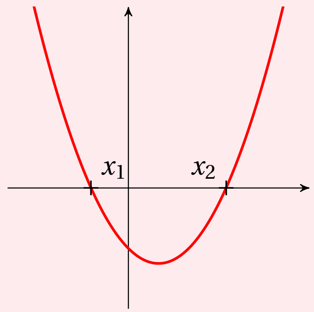
Un polynôme du second degré est parfois factorisable en

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

où a est le **coefficient dominant**, et x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme, éventuellement égales.
Cette écriture s'appelle la **forme factorisée** du polynôme.

Propriété

Les **racines** d'un polynôme $f(x)$ sont les seules valeurs x telles que $f(x) = 0$.



Ce sont les abscisses des **points d'intersection** de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exemples ▶ Soit $f(x) = 5(x-6)(x+1)$. Les solutions réelles de l'équation produit $5(x-6)(x+1) = 0$ sont 6 et -1.

Ainsi, 6 et -1 sont les racines de $f(x)$

▶ Soit $f(x) = x^2 - 16$. Les racines du polynôme sont cette fois 4 et -4 car

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4.$$

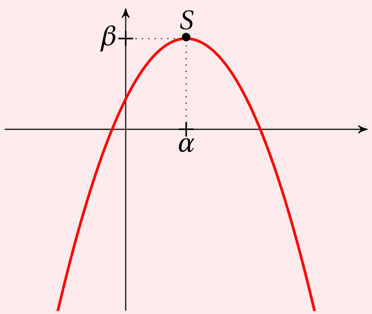
1.3 Forme canonique

Définition

La **forme canonique** d'un polynôme du second degré est $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Propriété

Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, alors α et β sont les **coordonnées du sommet** S de la parabole qui représente f.



Démonstration. Tout d'abord, le point $S(\alpha;\beta)$ est bien un point de la parabole car :

$$f(\alpha) = a \times 0 + \beta = \beta.$$

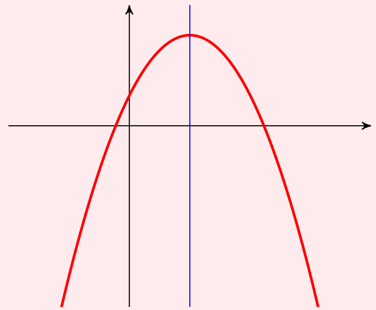
Enfin, $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

si $a > 0$	si $a < 0$
$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$	$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$	$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$
$\Leftrightarrow f(x) \geqslant \beta$	$\Leftrightarrow f(x) \leqslant \beta$
β est le minimum de f	β est le maximum de f

□

Propriété

Une parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par son sommet d'équation $x = \alpha$.



Démonstration. Si on reprend les notations de la propriété précédente, la droite verticale en question est la droite d d'équation $x = \alpha$. La parabole est symétrique par rapport à d si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\alpha + t) = f(\alpha - t)$.
C'est le cas puisque si $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha + t) = a(\alpha + t - \alpha)^2 + \beta = at^2 + \beta = a(-t)^2 + \beta = a(\alpha - t - \alpha)^2 = f(\alpha - t).$$

□

2 Discriminant et racines

2.1 Mise sous forme canonique

Propriété

Dans la forme canonique, α et β se déterminent grâce aux formules suivantes :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration. On a :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

On retrouve bien la formule donnée pour α et on a vu plus haut déjà que $f(\alpha) = \beta$. □

Algorithmique & Programmation

En Python, on peut créer une fonction permettant de calculer les valeurs de α et de β à partir des coefficients du trinôme :

```python
def formecanonique(a,b,c):
    alpha=-b/(2*a)
    beta=a*alpha**2+b*alpha+c
    return alpha,beta
```

2.2 Discriminant

Définition

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant**, noté Δ, le nombre :

$$\Delta=b^2-4ac.$$

Propriété | Factorisation

$f(x)=ax^2+bx+c$ peut être factorisé si, et seulement si, $\Delta \geqslant 0$.

Démonstration. Dans la forme canonique, avec les formules ci-dessus, on a :

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Lorsque Δ est positif, on voit apparaître dans les crochets une différence de deux carrés, que l'on sait factoriser à l'aide de l'identité remarquable $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$;
- Quand Δ est strictement négatif, on y retrouve une somme de deux nombres positifs.

□

2.3 Calcul des racines

Théorème

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré.

- Si $\Delta>0$, alors le polynôme a **deux racines réelles** x_1 **et** x_2 telles que

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta=0$, alors le polynôme a **une seule racine** x_0, dite **racine double**.

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\alpha$$

- Si $\Delta<0$, alors le polynôme n'a **pas de racine réelle**.

Démonstration. On a $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
Il suffit de résoudre l'équation produit $f(x)=0$ pour trouver les racines de $f(x)$. □

Exemples

- Pour $f(x)=5x^2-3x+4$, $\Delta=(-3)^2-4\times5\times4=9-80=-71<0$ donc le polynôme n'admet pas de racine réelle.
- Pour $f(x)=2x^2+2x-1$, $\Delta=2^2-4\times2\times-1=4+8=12>0$ donc le polynôme admet deux racines réelles : $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{\Delta}}{2\times2}=\dfrac{-2-\sqrt{12}}{4}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{\Delta}}{2\times2}=\dfrac{-2+\sqrt{12}}{4}$.

Remarque Jusqu'à maintenant, pour résoudre une équation de degré 2 (du type $ax^2+bx+c=0$), le seul outil dont on disposait était la règle du produit nul et on factorisait par facteur commun ou identité remarquable.

2.4 Somme et produit des racines

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2. Alors :

- la somme des racines $x_1 + x_2$ est égale à $\dfrac{-b}{a}$;
- le produit des racines $x_1 x_2$ est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Démonstration. Il suffit de calculer $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$ avec les formules des racines. □

Remarques

- On obtient que $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \alpha$, autrement dit la moyenne des racines est égale à α.

  C'est cohérent avec notre propriété de symétrie de la parabole par la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

- Si l'une des deux racines est une *racine évidente*, c'est-à-dire une racine que l'on peut *voir* facilement, on peut utiliset la formule de la somme ou du produit pour déterminer la deuxième racine sans avoir à calculer Δ.